Aufgabe 12.1

a) Für die Gruppengeschwindigkeit gilt: $v_k = \frac{1}{\hbar}\partial_k \mathcal{E}$. Damit folgt in willkürlichen Einheiten:

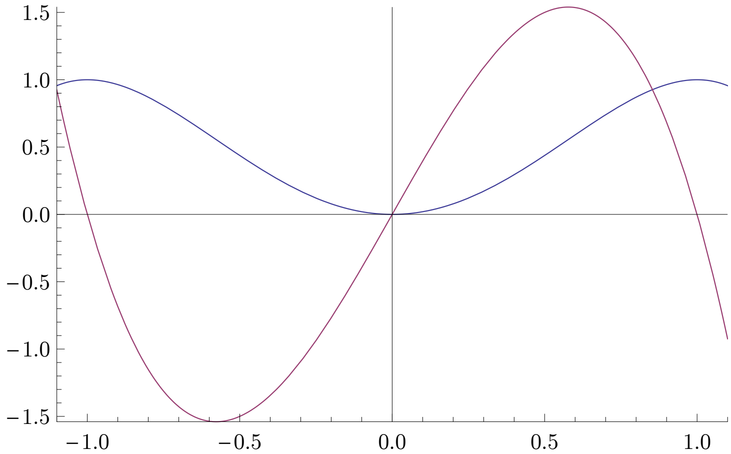

Abbildung 1: Der Verlauf der Energie (blau), und der Verlauf der Gruppengeschwindigkeit in Abhängigkeit des Wellenvektor (blau).

b) Beginnen mit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v = \frac{1}{\hbar}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}k}, \quad \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = -\frac{e}{\hbar}E$. Dabei ist $v = v(k)$ und $k = k(t)$.
Aufgrund der geforderten Periodizität wird für die Energie $\mathcal{E} = A\cos ak$ angenommen. Daraus folgt für die Geschwindigkeit: $v(k) = -\frac{Aa}{\hbar}\sin ak$.
Die Differentialgleichung für k ergibt im Allgemeinen: $k(t) = k(0) - \frac{e}{\hbar}Et$.
Somit gilt für den Ort der Elektronen:

$$x(t) = \int v(k(t))\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

$$= \int -\frac{Aa}{\hbar}\sin\left(ak(0) - a\frac{e}{\hbar}Et\right)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$= -\frac{Aa}{eE}\cos\frac{aeEt}{\hbar} \tag{3}$$

Wie man sieht (da Ableitung erneut integriet wurde), folgt dieses Ergebnis auch für Energien welche eine periodische Verteilung haben, welche nicht in der oben gegebenen Form vorliegen.
Bei einem angelegten Feld führen die Elektronen also eine Schwingung mit $\omega = \frac{aeE}{\hbar}$ aus.

c) $\omega = \frac{aeE}{\hbar}$ folgt aus obiger Aufgabe, durch Einsetzen der Werte erhält man:$\omega = 3.83 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Hz}$