Aufgabe 1

Die Gruppe, welche aus e, a, b erzeugt wird, hat insgesamt $3! = 6$ Elemente, die weiteren drei Elemente sind b^2, ab, abb (gemäß dem Hinweis). Es folgt außerdem:

$$aa = e \Rightarrow a = a^{-1} \tag{1}$$

$$bbb = e \Rightarrow bb = b^{-1} \tag{2}$$

$$(ab)(ab) = e \Rightarrow (ab)^{-1} = (ab) \Rightarrow ab = b^{-1}a^{-1} = bba \tag{3}$$

Daraus folgt:

D_3	e	a	b	bb	ab	abb
e	e	a	b	bb	ab	abb
a	a	e	ab	abb	b	bb
b	b	abb	bb	e	a	ab
bb	bb	ab	e	b	abb	a
ab	ab	bb	abb	a	e	b
abb	abb	b	a	ab	bb	e

Aufgabe 2

Nutze einzeilige Schreibweise, es folgt direkt

S3	123	213	132	321	231	312
123	123	213	132	321	231	312
213	213	123	231	312	132	321
132	132	312	123	231	321	213
321	321	231	312	123	213	132
231	231	321	213	132	312	123
312	312	132	321	213	123	231

Aufgabe 3

Stelle jeweils Multiplikationstabelle auf; Elemente werden gemäß der Reihenfolge in a, b, c, d umbenannt.

a)

Das neutrale Element ist offensichtlich a:

G_1	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

b)

Das neutrale Element ist folgend c:

G_2	a	b	c	d
a	b	d	a	c
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	c	d	a	b

e)

Das neutrale Element ist offensichtlich a, die weiteren Zuordnungen sind:

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

c)

Das neutrale Element ist offensichtlich a:

G_3	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

d)

Das neutrale Element ist offensichtlich a:

G_4	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	c	b	a

es folgt: Die Elemente sind dabei jeweils ihre eigenen Inversen.

G_5	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Schlussfolgerung

Alle Gruppen bis auf G_2 sind abelsch, folglich kann diese zu keiner der anderen Gruppen isomorph sein.

Bei G_3 und G_5 sind jeweils alle Elemente ihr eigenes Inverses, bei G_1 und G_4 nicht. Somit kann keine Isomorphie zwischen diesen Paaren existieren.

Offensichtlich sind G_3 und G_5 isomorph zueinander, wobei der Isomorphismus die Identität ist.

Ein möglicher Isomorphismus von G_1 und G_4 muss die neutralen Elemente aufeinander abbilden. Durch Vergleich der Multiplikationstabellen stellt man fest, dass man einen Isomorphismus erhält wenn man zusätzlich b auf b, c auf d und d auf c abbildet.

Aufgabe 4

Es ist zu zeigen: Das Zentrum Z ist abelsch und es ist eine Untergruppe.

Die erste Bedingung folgt sofort aus der Beziehung $zg = gz$. Denn wenn die Elemente der Untergruppe mit allen Elementen der gesamten Gruppe kommutieren, dann kommutieren auch alle Elemente der Untergruppe untereinander.

Für die Bedingung der Untergruppe muss gezeigt werden, dass die Untergruppe abgeschlossen ist und für das für ein Element dieser Untergruppe das Inverse existiert:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \in Z: &\quad z_1 g = g z_1,\ z_2 g = g z_2 \quad \Rightarrow z_1 z_2 g = z_1 g z_2 = g z_1 z_2 \\ z^{-1} \in Z: &\quad zg = gz \Rightarrow z^{-1} z g z^{-1} = z^{-1} g z z^{-1} \Rightarrow g z^{-1} = z^{-1} g \end{aligned}$$