Aufgabe 18

Hamiltonians Der Hamiltonian für das betrachtete System sowie den harmonischen Oszillator lauten:

$$\hat{\mathrm{H}}_E = \frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{\mathrm{x}}^2 - qE\hat{\mathrm{x}}$$
$$\hat{\mathrm{H}}_0 = \frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{\mathrm{x}}^2$$

Wobei q die Ladung des Teilchens und E das Elektrische Feld darstellen.

Quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned}\hat{\mathrm{H}}_E &= \frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{\mathrm{x}} - \frac{qE}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{m\omega^2}{2}\frac{q^2E^2}{m^2\omega^4} \\ &= \frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{\mathrm{y}}^2 - \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}\end{aligned}$$

Da (im Ortsraum) $y = x + \mathrm{const}$, folgt: $\partial_y = \partial_x$ und der resultierende Hamiltonian kann für y als einen normalen harmonischen Oszillator mit Energieoffset betrachtet werden.

Eigenfunktionen und -Werte: Dabei ergeben sich die bekannten Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators:

$$\psi_n(y) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}y\right) e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}y^2}$$

Hier jedoch mit Energieeigenwert:

$$E_E = E_0 - \frac{q^2E^2}{2m\omega^2}, \quad E_0 = \hbar\omega(n + 1/2)$$

Übergänge des ungestörten Grundzustandes Zu Beginn befindet sich das Teilchen im Zustand: $\psi_0(x)$
Nach dem Einschalten des Feldes befindet es sich in einem Zustand $\psi_n(y)$.

Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang den gestörten Zustand n ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}W_{0\to n} &= |\langle\psi_0(x)|\psi_n(y)\rangle|^2 \\ \text{Mathematica} \quad &= \underline{\frac{1}{n!}\mathrm{e}^{-A}A^n}, \quad A = \frac{q^2E^2}{2\hbar m\omega^3}\end{aligned}$$

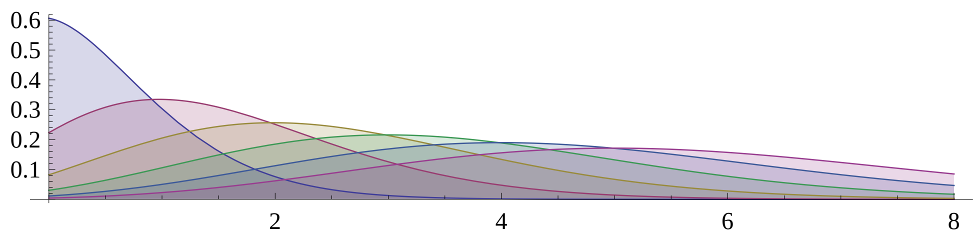

Abbildung 1: Die Übergangswahrscheinlichkeit in den n-ten Zustand für $A = 0.5, 1.5, \ldots, 5.5$ (von links nach rechts).