Aufgabe 89

Es sei A und A^* die Matrix der Endomorphismen f und f^*. Dabei gilt nach Satz 20.4: $A^* = A^\intercal$.
Da $(A+B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal$, $(AB)^\intercal = B^\intercal A^\intercal \to (A^n)^\intercal = (A^\intercal)^n$, so ist auch:

$$\mu(A) = 0 = 0^\intercal = \mu(A)^\intercal = \mu(A^\intercal)$$

Aufgabe 90

Erstelle Matrix für die Bilinearform:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 17 & -4 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$q(x) = \beta(x,x) = xQx$$

Nutze bekannte Methode um „schöne“ Diagonalform zu erstellen (Kongruente Matrizen repräsentieren gleiche Bilinearform):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 17 & -4 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ -2 & 7 & 17 & -4 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ -2 & 7 & 17 & -4 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -44 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{22} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -44 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

Rang ist 4, Signatur 2, wie Minkowski Raum. (Nach Bemerkung 22.3)

Aufgabe 91

Bekanntermaßen ist die Spur einer komplexen Matrix die Summe der Eigenwerte.
Man diagonalisiere A mit $A = PDP^{-1}$, so folgt:

$$\mathrm{e}^A = P\mathrm{e}^D P^{-1}$$

und damit für die Determinante:

$$\det \mathrm{e}^A = \det P \det \mathrm{e}^D \det P^{-1} = \det \mathrm{e}^D$$

Da die Diagonaleinträge von D die Eigenwerte sind, folgt:

$$\det \mathrm{e}^D = \mathrm{e}^{\lambda_1} \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2} \dots \mathrm{e}^{\lambda_n}$$

Dies ist aber gleich dem Exponenten der Spur der Matrix:

$$\mathrm{e}^{\operatorname{Tr} A} = \mathrm{e}^{\lambda_1} \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2} \dots \mathrm{e}^{\lambda_n} \quad \checkmark$$

Aufgabe 92

Betrachte allgemein $n \geq 3$, sonst ist nichts zu finden. Voraussetzung ist das Vorhandensein von positiven und negativen Eigenwerten, dies ist für $n = 0, 1$ nicht möglich, und auch nicht für $n = 2$:

$$\left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| \geq 0 \Leftrightarrow ad - bc \geq 0 \Leftrightarrow ad \geq bc$$

Um Indefinitheit zu erreichen muss $a < 0$ gelten, nach Voraussetzung muss $d < 0$ sein, da jedoch $b = c$ erhält man einen Widerspruch: Somit folgt als mögliche Bilinearform:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Diese hat sowohl positive wie negative Eigenwerte und wegen $\det A = \prod \lambda_i = 1$ auch wie gefordert die Bedingung der Aufgabenstellung erfüllt $\surd$.