Aufgabe 84

$$\begin{aligned}
q(x_1,x_2,x_3) &= 3x_1^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\
&= x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+2x_1^2+x_2^2-2x_1x_3+4x_2x_3+x_3^2\\
&= (x_1+x_2)^2+x_1^2-2x_1x_3+x_3^2+x_1^2+x_2^2+4x_2x_3\\
&= (x_1+x_2)^2+(x_1-x_3)^2+2(x_2^2+2x_2x_3+x_3^2)+x_1^2-x_2^2-2x_3^2\\
&= (x_1+x_2)^2+(x_1-x_3)^2+2(x_2+x_3)^2+x_1^2-x_2^2-2x_3^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 85

Nach dem Trägsheitssatz von Silvester hat die gegebene Bilinearform in einer bestimmten Basis von V die Form wie in Satz 22.1.
Dabei existieren k Einträge $+1$, l Einträge -1 und $m=n-k-l$ Einträge 0.
Außerdem gilt: $\operatorname{rg}\beta = k+l = n$ nach Aufgabenstellung, also ist $m=0$. Die Signatur p ergibt sich nach: $p=k-l \to p\in\{-n,\dots,n\} \to \dim U \in \{0,\dots,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\}$.

$\mathbf{p=\pm n}$: β wird die Identitätsabbildung (evt. mit Vorzeichen), entsprechend ist die Dimension null, wie vorgegeben.

$\mathbf{p\neq 0}$: Gehe davon aus, dass $l>k$, sonst betrachte mit -1 multiplizierte Matrix (ändert Eigenschaften der Nullabbildung nicht). Bilde Basis der Art $b_1=(1,0\dots)^\intercal, b_2=(1,1,0,\dots)^\intercal, b_3=(1,0,1,0,\dots)^\intercal,\dots$. Durch einfaches nachrechnen erkennt man, dass $\beta(b_x,b_x)=0$, sofern $k+1\le x\le n$, sofern gibt es l Möglichkeiten für x. Alle $\beta(b_x,b_y), x\neq y$ können nicht auf null abgebildet werden (werden entsprechend ±1).

Somit hat der Unterraum genau die Dimension l, bzw. wenn man $k>l$ zulässt die Dimension $\max\{k,l\}$. Da $\max\{\frac{n+p}{2},\frac{n-p}{2}\}=\max\{\frac{k+l+k-l}{2},\frac{k+l-k+l}{2}\}=\max\{k,l\}$ folgt fast die Aussage auf dem Aufgabenblatt.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

wird durch $(1,1,0)^\intercal$ und $(1,0,1)^\intercal$ auf null abgebildet.

Aufgabe 86

Entwickle nach erster Zeile (benutze A_n wie in Beispiel 22.2 definiert):

$$|B_n| = |A_{n-1}| + 2\sqrt{2}|C_{n-1}| = |A_{n-1}| + 8|A_{n-2}|$$

Dabei ist C_{n-1} die Matrix, die entsprechend durch streichen entstand und durch Entwicklung nach der ersten Spalte zu A_{n-2} wird. Nach Vorlesungbeispiel sind die Determinanten für A_n alle positiv, also ist auch die Determinante von B_n positiv und damit nach Beispiel 22.2 B_n positiv definit.

Aufgabe 87

(i)

Nein, sind sie nicht.

(ii)

$\mathbb{F}_2$ hat nur die möglichen Basen $(1,0)^\intercal$ und $(0,1)^\intercal$, somit können die Basiswechselmatrizen auch bloß die folgende Gestalt haben.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Dabei sind diese Matrizen jedoch selbst ihr transponiertes. Im $\mathbb{F}_2$ kommt man somit immer wieder auf die Ausgangsmatrix zurück.

Aufgabe 88

Bildet man J_f, so erhält man:

$$J_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 + 2\mathrm{Cos}[x] - x\mathrm{Sin}[x] & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom der Matrix lautet:

$$\chi = 62 - 55x + 14x^2 - x^3$$

man erhält damit nur die positiven Eigenwerte (wie man leicht nachrechnet, wenn man 2 durch probieren gefunden hat):

$$6 + \sqrt{5}, 6 - \sqrt{5}, 2$$

Folglich ist die Matrix bei nur positiven Eigenwerten positiv definit ist (Bemerkung 22.3), somit hat die Funktion im gegebenen Punkt ein streng lokales Minimum.