Aufgabe 14

Die zeitfreie Schrödingergleichung lautet:

$$\frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{2m}\psi + V(\hat{\mathrm{x}})\psi = E\psi \tag{1}$$

mit $V(x) = -Ax$ folgt in der Ortsdarstellung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = (E + Ax)\psi(x) \tag{2}$$

und in der Impulsdarstellung:

$$\left(\frac{p^2}{2m} - E\right)\tilde{\psi}(p) + A\mathcal{F}\left[x\psi(x)\right] = 0 \tag{3}$$

wobei $\tilde{\psi}$ durch die Fouriertransformation:

$$\tilde{\psi} = [\mathcal{F}\psi](p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{p}{\hbar}x}\psi(x)x$$

gegeben ist.

a)

siehe *b)*

b)

Berechne $\mathcal{F}[x\psi(x)](p)$, mit Bedingung: $\psi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\partial_p \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{p}{\hbar}x}\psi(x) = -\frac{\mathbf{i}}{\hbar}x\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{p}{\hbar}x}\psi(x)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[x\psi(x)](p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{p}{\hbar}x}x\psi(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\mathbf{i}\hbar\right)\partial_p\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\frac{p}{\hbar}x}\psi(x) \\
&= \left(\mathbf{i}\hbar\right)\partial_p\tilde{\psi}(p)
\end{aligned}$$

Es folgt somit als Ausgangsgleichung:

$$\partial_p\tilde{\psi}(p) = \frac{\mathbf{i}}{\hbar A}\left(E - \frac{p^2}{2m}\right)\tilde{\psi}(p)$$

Dessen Lösung man direkt Ablesen kann:

$$\tilde{\psi}(p) = \underline{C\exp\left[\frac{\mathbf{i}}{\hbar A}\left(Ep - \frac{p^3}{3\cdot 2m}\right)\right]}, \quad C \in \mathbb{C}$$

Transformiere in Ortsdarstellung, benutze ($f_{g,u}$: gerade/ungerade Funktion):

$$\exp\mathbf{i}x = \cos x + \mathbf{i}\sin x, \quad \int_{\mathbb{R}} f_g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} f_g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_{\mathbb{R}} f_u(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\psi(x) = [\mathcal{F}^{-1}\tilde{\psi}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \; \mathrm{e}^{+\mathbf{i}\frac{p}{\hbar}x} \tilde{\psi}(p)$$
$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \; \exp\left[\frac{\mathbf{i}}{\hbar A}\left(Apx + Ep - \frac{p^3}{3\cdot 2m}\right)\right]$$
$$= \frac{2C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}p \; \cos\left[\frac{1}{\hbar A}\left(Apx + Ep - \frac{p^3}{3\cdot 2m}\right)\right]$$

Substituiere: $\frac{u^3}{3} = -\frac{p^3}{6m\hbar A}, \to p = -\sqrt[3]{2m\hbar A}u \to \mathrm{d}p = -\sqrt[3]{2m\hbar A}\,\mathrm{d}u$

$$= -\frac{2C}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sqrt[3]{2m\hbar A} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}u \; \cos\left[\frac{u^3}{3} - \frac{\sqrt[3]{2m\hbar A}}{\hbar A}(Axu + Eu)\right]$$
$$= \underbrace{-\frac{2C\pi}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sqrt[3]{2m\hbar A}}_{C_2} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}u \; \cos\left[\frac{u^3}{3} - \sqrt[3]{\frac{2mA}{\hbar^2}}\left(x + \frac{E}{A}\right)u\right]$$
$$\psi(x) = \underline{C_2 \mathrm{Ai}\left(-\sqrt[3]{\frac{2mA}{\hbar^2}}\left(x + \frac{E}{A}\right)\right)}$$

Wobei Ai die Airy Funktion bezeichnet.

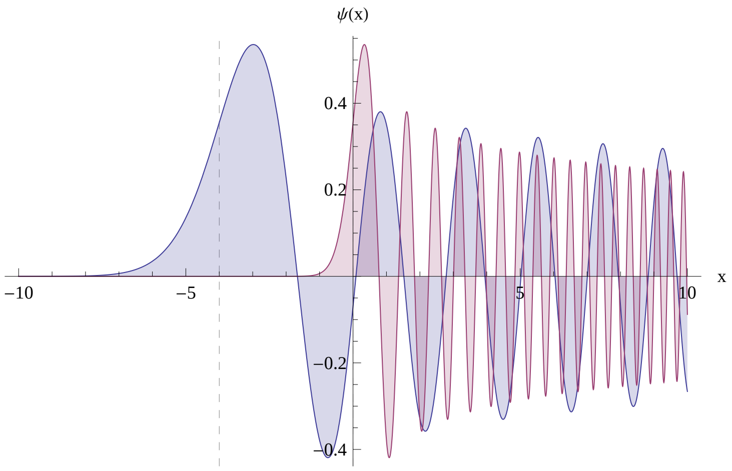

Abbildung 1: Verlauf der Airy Funktionen mit Ai$[-(x+4)]$ (blau) und Ai$[-3x+0]$ (rot)

Man erkennt deutlich den starken Abfall im verbotenen Bereich ($x < -4$ (blau), $x < 0$ (rot), $x < \frac{E}{A}$ (allgemein)), für $x \to +\infty$ fällt die Airy-Funktion ebenfalls auf null ab, der Erwartungswert für den Ort konvergiert jedoch nicht.