Aufgabe 12

Es gilt: $\vec{E} = \operatorname{div}\Phi = \operatorname{div}(\Phi + C)$, $C = \text{const.}$
Außerdem: $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}$, $\quad \operatorname{div}\vec{B} = 0$.
$\vec{B}$ bleibt konstant bei $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{rot}\vec{A} + \operatorname{grad} f$.
Man will erreichen: $\operatorname{div}\vec{A} \overset{!}{=} 0$, und es sei ohne Eichung: $\operatorname{div}\vec{A} = g$, so folgt:

$$g + \operatorname{div}\ \operatorname{grad} f = g + \Delta f = 0$$

Man hat somit eine Bestimmungsgleichung für f, außerdem kann man C so wählen, dass die Strahlungsfeldeichung erfüllt ist.

Aufgabe 13

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{\mathrm{p}}}_S &= \frac{1}{c^2}\int \mathrm{d}^3\vec{x}\left(\hat{\vec{\mathrm{E}}} \times \hat{\vec{\mathrm{H}}}\right),\\
\hat{\vec{\mathrm{E}}}(\vec{x},t) &= -\frac{\partial\hat{\vec{\mathrm{A}}}(\vec{x},t)}{\partial t} = \sum_\mu \left(\frac{\hbar\omega_\mu}{2V\epsilon_0}\right)^{1/2} \vec{e}_\mu \left\{\mathbf{i}\hat{\mathrm{a}}_\mu(t)\mathrm{e}^{\mathbf{i}\vec{k}_\mu\vec{x}} + \mathrm{H.A.}\right\}\\
\hat{\vec{\mathrm{B}}}(\vec{x},t) &= \operatorname{rot}\hat{\vec{\mathrm{A}}}(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\sum_\mu \left(\frac{\hbar}{2V\epsilon_0\omega_\mu}\right)^{1/2}\left(\frac{\vec{k}_\mu}{|k_\mu|}\times\vec{e}_\mu\right)\left\{\mathbf{i}\hat{\mathrm{a}}_\mu(t)\mathrm{e}^{\mathbf{i}\vec{k}_\mu\vec{x}} + \mathrm{H.A.}\right\}\\
\vec{k}_\mu\cdot\vec{e}_\mu &= 0, \quad \omega_\mu = c|\vec{k}_\mu|, \quad \vec{e}_{\mu,1}\cdot\vec{e}_{\mu,2} = 0, \vec{k}_{\mu,1} = \vec{k}_{\mu,2}
\end{aligned}$$

Einsetzen der Relationen ergibt $\left(\mu_0 H = B,\ c\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 1\right)$:

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{\mathrm{p}}} =& \frac{1}{c^2\mu_0}\left(\frac{\hbar}{2V\epsilon_0}\right)\int \mathrm{d}^3x \sum_{\mu,\mu'}\left(\vec{e}_\mu \times \left(\frac{\vec{k}_{\mu'}}{|k_{\mu'}|}\times\vec{e}_{\mu'}\right)\right)\cdot\\
&\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}\cdot\left\{\hat{\mathrm{a}}_\mu(t)\mathrm{e}^{\mathbf{i}\vec{k}_\mu\vec{x}} + \mathrm{H.A.}\right\}\cdot\left\{\hat{\mathrm{a}}_{\mu'}(t)\mathrm{e}^{\mathbf{i}\vec{k}_{\mu'}\vec{x}} + \mathrm{H.A.}\right\}\\
=& -\frac{\hbar}{2}\sum_{\mu,\mu'}\left(\vec{e}_\mu \times \left(\frac{\vec{k}_{\mu'}}{|k_{\mu'}|}\times\vec{e}_{\mu'}\right)\right)\cdot\\
&\left[\underbrace{\delta_{\mu\mu'}\hat{\mathrm{a}}_\mu\hat{\mathrm{a}}_{\mu'}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\vec{k}_\mu\vec{x}}\mathrm{e}^{\mathbf{i}\vec{k}_{\mu'}\vec{x}} + \delta_{\mu\mu'}\hat{\mathrm{a}}^\dagger_\mu\hat{\mathrm{a}}^\dagger_{\mu'}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\vec{k}_\mu\vec{x}}\mathrm{e}^{-\mathbf{i}\vec{k}_{\mu'}\vec{x}}}_{=0} - \delta_{\mu\mu'}\hat{\mathrm{a}}^\dagger_\mu\hat{\mathrm{a}}_{\mu'} - \delta_{\mu\mu'}\hat{\mathrm{a}}_\mu\hat{\mathrm{a}}^\dagger_{\mu'}\right]\\
=&\frac{\hbar}{2}\sum_{\mu\mu'}\left(\delta_{\mu\mu'}\frac{\vec{k}_{\mu'}}{|k_{\mu'}|}\right)\left[\delta_{\mu\mu'}\hat{\mathrm{a}}^\dagger_\mu\hat{\mathrm{a}}_{\mu'} + \delta_{\mu\mu'}\hat{\mathrm{a}}_\mu\hat{\mathrm{a}}^\dagger_{\mu'}\right]\\
=&\frac{\hbar}{2}\sum_{\mu}\left(\frac{\vec{k}_{\mu'}}{|k_{\mu'}|}\right)\left[\hat{\mathrm{a}}^\dagger_\mu\hat{\mathrm{a}}_\mu + \hat{\mathrm{a}}_\mu\hat{\mathrm{a}}^\dagger_\mu\right]\\
=&\frac{\hbar}{2}\sum_{\mu}\left(\frac{\vec{k}_{\mu'}}{|k_{\mu'}|}\right)\left[n_\mu + (n_\mu + 1)\right]\\
=&\hbar\sum_{\mu}\left(\frac{\vec{k}_{\mu'}}{|k_{\mu'}|}\right)n_\mu
\end{aligned}$$