Aufgabe 76

a)

Nach *Satz 20.1* gilt: $U^\perp := \{\lambda \in V^* : \lambda|U = 0\}$, dabei ist U der Untervektorraum von V, welcher durch $a_1, \dots, a_k,\ k \leq n$ aufgespannt wird. Man erzeuge nun daraus eine Orthonormalbasis $b_1, \dots, b_k$ von U und setze diese mit $b_{k+1}, \dots, b_n$ zu einer orthonormalen Basis von V fort: $V = \operatorname{span}(b_1, \dots, b_n)$.

Nach Bemerkung *20.1 ii)* existiert eine linear unabhängige Basis $\beta_1, \dots, \beta_n$ mit $\beta_i(b_j) = \delta_{ij},\ V^* = \operatorname{span}(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Diese Zuordnung $b_i \mapsto \beta_j$ ist:

- injektiv, denn gleiche β_i werden nur durch ein einziges b_j erzeugt: $\beta_i(b_j) = \overbrace{\delta_{ij} = \delta_{ik}}^{=\delta_{jk}} = \beta_i(b_k), \forall \beta_i \quad \Rightarrow b_j = b_k$.
- surjektiv, denn jedes β_i wird tatsächlich angenommen, denn mit $\beta_i(b_j) = \delta_{ij}, \quad i,j \in \{1, \dots, n\}$ gibt es immer ein $i = j$

Es ist noch zu zeigen, dass $U^\perp$ wieder ein Untervektorraum ist:
Bildet man $U^\perp$ gemäß $U^\perp = \operatorname{span}(\beta_{k+1}, \dots, \beta_n)$, so ist dies ein Untervektorraum von V^*. Dieser erfüllt auch die Definition in *Satz 20.1*, da $U = \operatorname{span}(b_1, \dots, b_k)$ und $U^\perp = \operatorname{span}(\beta_{k+1}, \dots, n)$, somit ist ist $\lambda|U \propto \sum_{i,j} \beta_i(b_j) = 0$, da $\delta_{ij} = 0$ für $i \in \{k+1, n\},\ j \in \{1, k\}$ für alle Elemente in U erfüllt, da sich diese in eine Summe von $\sum_i a_i b_i$ zerlegen lassen. $\surd$

b)

Aufgrund von $|K| < \infty$ gibt es nur eine begrenze Zahl an Möglichkeiten, V mit n linear unabhängigen Vektoren aufzuspannen. Zeige nun, dass es in jeder dieser möglichen Basen die gleiche Anzahl an möglichen k und $n-k$ dimensionalen Vektorräumen (aufgespannt von $k,\ (n-k)$ Vektoren dieser Basis) gibt. Da dies für jede Basis der Fall ist, ist dies auch für alle möglichen Untervektorräume der jeweiligen Dimension gezeigt und die Aufgabe allgemein gelöst.

Wie bereits beschrieben, wählt man zur Bildung der Untervektorräume $k,\ (n-k)$ Vektoren aus der Basis aus. Für deren Auswahl ergeben sich (siehe Kombinatorik: Kombination ohne Wiederholung): $M = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ Möglichkeiten. Damit ergibt sich die Behauptung, dass es die gleiche Zahl an Untervektorräumen der Dimension k, wie $n-k$ gibt. $\surd$

Aufgabe 77

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |X \operatorname{Id} - A| = \det \begin{pmatrix} -3+X & 1 & -1 \\ -2 & X & -1 \\ -1 & 1 & -2+X \end{pmatrix}$$
$$= -4 + 8X - 5X^2 + X^3$$
$$= (-2+X)^2(-1+X)$$

Also bestimme Eigenräume zu den Eigenwerten 1 mit Vielfachheit 1 und 2 mit Vielfachheit 2

$$A - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_1 = (0,1,1)^\intercal$$

$$A - 2\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = (1,1,0)^\intercal$$

$$(A - 2\,\mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_1 = (1,1,0)^\intercal, c_2 = (0,0,1)^\intercal$$

$(A - 2\,\mathrm{Id})c_2 = c_1 = b_1$. Wir erhalten eine Basis aus a_1, c_1, c_2:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = J = D + N, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\exp D = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}, \quad \exp N = N^0 + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \exp(D+N) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \end{pmatrix}$$

$$\exp A = S \exp(J)\; S^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^2 & -e^2 & e^2 \\ -e + 2e^2 & e - e^2 & e^2 \\ -e + e^2 & e - e^2 & e^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 78

Nach den Regeln der Matrixmultiplikation erhält man:

$$(AJ)_{ij} = \sum_k a_{ik} j_{kj}; \qquad (JA)_{ij} = \sum_k j_{ik} a_{kj}$$

Dabei gilt: $j_{ik} = \delta_{(i-1)k}$, es folgt:

$$(AJ)_{ij} = \sum_k a_{ik}\delta_{(k-1)j} = a_{i(j+1)}; \qquad (JA)_{ij} = \sum_k \delta_{(i-1)k} a_{kj} = a_{(i-1)j}$$

Mit $AJ = JA$ folgt: $a_{i(j+1)} = a_{(i-1)j}, \quad i, j \in 1, n$,
was äquivalent dazu ist, dass alle Einträge auf einer jeweiligen Diagonale gleich sind. Außerdem erkennt man, dass die Einträge über der Hauptdiagonalen verschwinden, da $a_{1,j'} = a_{0,j'-1} = 0, \quad j' \in 2, n$, somit ergibt sich die Behauptung.

Aufgabe 79

Die Matrix für die Differentialgleichung lautet:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{mit:} \quad \dot{x}(t)^\intercal = Mx(t)^\intercal, \quad |X\,\mathrm{Id} - M| = X(X-2) + 1 = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$$

Man erhält für die Matrix abzüglich des Eigenwertes 1:

$$A - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad m_1 = (1,1)^\intercal$$

$$(A - \mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m_2 = (1,0)^\intercal, m_3 = (0,1)^\intercal$$

Somit erhält man m_3 und $(A - \mathrm{Id})m_3 = m_1$ als Vektoren für die Transformationsmatrix:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1}MS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id} + J_2$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$x(t)^\mathsf{T} = \mathrm{e}^{Mt} v^\mathsf{T}, \quad v = (a,b)^\mathsf{T}, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

Berechne e^{Mt}:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{Mt} &= S\mathrm{e}^{Dt}\mathrm{e}^{Nt}S^{-1} = S \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} S^{-1} \\ &= S \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ e^t t & e^t \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} e^t(1-t) & e^t t \\ -e^t t & e^t(1+t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit erhält man die allgemeine Lösung zu:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a\mathrm{e}^t(1-t) + b\mathrm{e}^t t \\ x_2(t) &= -a\mathrm{e}^t t + b\mathrm{e}^t(1+t) \end{aligned}$$