Aufgabe 62

Betrachte Matrizen mit $n \geq 3$, da sonst die Matrix A der Identität entspricht und somit die Betrachtung hinfällig wird.

Für die Elemente der Matrix A kann geschrieben werden: $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i+j \quad \text{gerade} \\ 0, & i+j \quad \text{ungerade} \end{cases}$

Für das Quadrat einer Matrix folgt daraus:

$$(A \cdot A)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} a_{rj} = \begin{cases} 0, & i+j \quad \text{ungerade, da } \forall r \text{ eines der Faktoren } a_{ir}, a_{rj} = 0 \\ m, & m \geq 2 \end{cases}$$

Dabei ist m die Anzahl an nicht verschwindenden Einträgen pro betrachteter Zeile einer Matrix. (Analog zur betrachteten Spalte aufgrund von $A = A^\intercal \to a_{ij} = a_{ji}$ und $a_{ix} = a_{jx},\ x \in [1..n]$ für $i+j$ gerade.) m ist für Matrizen mit geradem n für jedes Element gleich. Für Matrizen mit ungeradem n alterniert es pro Zeile.

Es lässt sich so schlussfolgern, das man für jede Matrix zwei unabhängige Zeilen hat, entsprechend gilt:

$$\dim \ker A = n - 2 \qquad \dim \operatorname{im} A = 2$$

Entsprechend lassen sich Basisvektoren $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n,\ \vec{b}_m = (b_{1,m}, b_{2,m}, \ldots, b_{n,m})^\intercal$ finden, für die A die gewünschte Struktur hat.

$$1 \leq m < n-2,\ m \text{ ungerade}: \quad b_{x,m} = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ -1, & x = m+2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$1 \leq m < n-2,\ m \text{ gerade}: \quad b_{x,m} = \begin{cases} 1, & x = 2 \\ -1, & x = m+2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$m = n-1: \quad b_{x,n-1} = \begin{cases} 1, & x \text{ ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$m = n: \quad b_{x,n} = \begin{cases} 1, & x \text{ gerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 63

Betrachten das charakteristische Polynom zur Matrix A:

$$|A - \mathbb{1} \cdot x| = x^6$$

Der Eigenwert beträgt 0, bestimme dazu den Kern für die weiteren Potenzen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie man sieht, ist der Kern von A^3 der komplette Vektorraum, dieser sei durch die Standardbasis aufgespannt. Die Betrachtung weiterer Potenzen ist demnach hinfällig.

Es folgt für die Basis $\vec{b}_1, \ldots \vec{b}_5$ von $\ker A^2$: $\vec{b}_1 = (-1,0,0,0,0,1)^\intercal$, $\vec{b}_2 = (0,0,0,0,1,0)^\intercal$, $\vec{b}_3 = (0,0,0,1,0,0)^\intercal$, $\vec{b}_4 = (0,0,1,0,0,0)^\intercal$, $\vec{b}_5 = (1,1,0,0,0,0)^\intercal$. Gemäß der Dimensionsformel ist $\dim \operatorname{im} A^2 = 1$.

Für den Kern von A erhält man eine Basis $\vec{c}_1 = (0,1,0,0,0,1)^\intercal$, $\vec{c}_2 = (-1,-1,0,0,1,0)^\intercal$, $\vec{c}_3 = (2,2,1,0,0,0)^\intercal$, $\quad \dim \operatorname{im} A = 3, \ \dim \ker A = 3$

Betrachten nun die Basisvektoren von $\ker A^3$, welche nicht in $\ker A^2$ liegen. Aus der Dimensionsformel folgt, das dies genau ein Vektor ist, nämlich $\vec{a}_6 = (0,0,0,0,0,1)^\intercal$, denn:

$$A \cdot \vec{a}_6 = (0,0,0,2,0,0)^\intercal \ , \ A^2 \cdot \vec{a}_6 = (4,4,4,0,4,0)^\intercal$$

Bildet man die direkte Summe aus $\ker A$ und $f(\vec{a}_6)$, erhält man als Basis dieses Unterraums: $\vec{c}_1 = (0,1,0,0,0,1)^\intercal$, $\vec{c}_2 = (-1,-1,0,0,1,0)^\intercal$, $\vec{c}_3 = (2,2,1,0,0,0)^\intercal$, $f(\vec{a}_6) = (0,0,0,2,0,0)^\intercal$. Dieser Unterraum soll durch einen weiteren Vektor zu einer Basis von $\ker A^2$ erweitert werden. Durch Vergleichen stellt man fest, dass $\vec{b}_2$ nicht von genannter Basis linear abhängig ist. Entsprechend sei dieser unsere Erweiterung. Es gilt:

$$A \cdot \vec{b}_2 = (1,0,1,0,1,-1)^\intercal \ ,$$

Wir suchen nun noch einen Vektor, welcher die Summe der beiden Unterräume so erweitert, das man $\ker A$ erhält. Die Basis der Summe der beiden Unterräume ist: $f(\vec{a}_6) = (0,0,0,2,0,0)^\intercal$, $f(\vec{b}_2) = (1,0,1,0,1,-1)^\intercal$. $\vec{c}_3$ kann offensichtlich nicht durch Linearkombination dieser beiden Vektoren gewonnen werden, weshalb er die gesuchte Erweiterung bildet.

Nun haben wir folgende Vektoren, welche unseren Vektorraum aufspannen und zusammen die gesuchte Matrix S bilden: $\vec{a}_6, f(\vec{a}_6), f^2(\vec{a}_6), \vec{b}_2, f(\vec{b}_2), \vec{c}_3$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 64

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, mit $A = PBP^{-1}$. Eine Eigenschaft von ähnlichen Matrizen ist, das sie den gleichen Rang haben. Entsprechend sind Matrizen mit ungleichem Rang auch nicht ähnlich.

Nilpotente Matrizen haben nie vollen Rang. Man kann sich leicht Nilpotente Matrizen konstruieren, indem man in die erste Zeile den Nullvektor schreibt und in die folgenden die Standardbasis $\vec{e}_1$ bis $\vec{e}_{n-1}$. Tauscht man einen beliebigen Vektor der Standardbasis gegen den Nullvektor, so bleibt die Matrix Nilpotent. Daraus folgt, das es für eine Matrix $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genau n verschiedene Ränge gibt, für die die Matrix Nilpotent ist ($\operatorname{rg} N \in [0, n-1]$). So hat man für jede Dimension n genau $p_n = n$ paarweise nichtähnliche nilpotente Matrizen.