Aufgabe 60

Betrachte Ausgangsmatrix A sowie A^2 und A^3 und bringe diese auf Zeilenstufenform.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A^3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ -2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da $A^2 = A^3$ folgt damit, dass $\dim\ker A^k = 2,\ \dim\operatorname{im} A^k = 1,\ k \geq 2$. Das Bild wird, wie man in der Zeilenstufenform von A sieht, durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt. In der Zeilenstufenform von A^2 erkennt man, dass der Kern gebildet wird durch $\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es folgt somit für die Matrix S:

$$S = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 3 & -7 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow S^{-1}AS = B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \quad \Rightarrow N = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Basis ist in S abzulesen. N und T innerhalb von B erfüllen offensichtlich die geforderten Eigenschaften.

Aufgabe 61

Betrachte im folgenden $n \geq 1$, für $n = 0$ ist die Betrachtung eines Basenwechsels uninteressant.

Für alle n gilt: $A^k = \lambda A$ für beliebige k, dies folgt aus: $a_{ij} = 1\ \forall 1 \leq i, j \leq n,\ (A \cdot A)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} a_{rj} = \sum_{r=1}^{n} 1^2 = n \Rightarrow \lambda = n^k$
Daher genügt es, den Fall $k = 1$ zu betrachten. Da alle Zeilen sowie Spalten identisch sind, ergibt sich der Rang der Matrix zu 1. Folglich erhält man:

$$\dim\ker A = n - 1, \quad \dim\operatorname{im} A = 1, \quad \operatorname{im} = \operatorname{span}\{(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n})\}$$

Das Bild wird entsprechend aus einem Vektor aufgespannt, welcher an jeder Stelle eine 1 hat. Der Kern wird durch $n-1$ Vektoren $b_2, \ldots, b_n$ aufgespannt, welche an ihrer ersten Stelle eine 1 haben und an ihrer n-ten Stelle eine -1, alle übrigen Stellen sind 0.

Eine entsprechende Matrix S um auf die gesuchte Basis zu kommen hat dann die Form:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}, \quad N = 0_{(n-1)\times(n-1)}, \quad T = n \cdot n^k$$