Aufgabe 24

Es wird mit gegebener Wahrscheinlichkeit ein Fremdatom eingebaut, entsprechend liegt eine Binomialverteilung vor. Die Wahrscheinlichkeit, n Fremdatome bei N Gesamtatomen zu finden beträgt:

$$w(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

Das Maximum liegt bei $n_{max} = \lfloor Np + p \rfloor = \lfloor 10^{20} 10^{-6} + 10^{-6} \rfloor = 10^{14}$
Für die Entropie erhält man: $S = k_B \log W$, wobei W das statistische Gewicht ist, also die Zahl der erreichbaren Mikrozustände. Dieses ergibt sich zu: $W = \frac{w(n_{max})}{w(n_{min})}$, wobei n_{min} der Zustand ist, in dem alle N Atome Fremdatome sind und welcher die geringste Wahrscheinlichkeit hat (offensichtlich).

$$w(n_{max}) = \binom{10^{20}}{10^{14}} \left(10^{-6}\right)^{10^{14}} (1-10^{-6})^{10^{20}-10^{14}}, \quad w(n_{max}) = \binom{10^{20}}{10^{20}} \left(10^{-6}\right)^{10^{20}} = \left(10^{-6}\right)^{10^{20}}$$

$$W = \binom{10^{20}}{10^{14}} \left(10^{-6}\right)^{10^{14}} (1-10^{-6})^{10^{20}-10^{14}} \left(10^{-6}\right)^{-10^{20}} = \binom{10^{20}}{10^{14}} \left(10^{-6}\right)^{10^{14}-10^{20}} (1-10^{-6})^{10^{20}-10^{14}}$$

$$W = \binom{10^{20}}{10^{14}} \left(10^{6}-1\right)^{10^{20}-10^{14}}$$

$$\begin{aligned} S &= k_B \left(\log \left(\binom{10^{20}}{10^{14}} \right) + \left(10^{20} - 10^{14}\right) \log \left(1 - 10^{-6}\right) \right) \\ &= k_B \left(\log 10^{20}! - \log 10^{14}! - \log (10^{20} - 10^{14})! + \left(10^{20} - 10^{14}\right) \log \left(10^{6} - 1\right) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Mathematica} = k_B \left(10^{10^{1.3284}} - 10^{10^{1.1803}} - 10^{10^{1.3284}} + 1.3815 \cdot 10^{21} \right) = 0.0190737 \, \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

Aufgabe 25

Es sei $N = \sum n_i$, es gilt:

$$W(n_1, n_2, n_3, n_4) = \frac{N!}{h^{3N}} \prod_i \frac{p_i^{n_i}}{n_i!} = \frac{N!}{h^{3N} n_1! n_2! n_3! n_4!} \exp\left[-\frac{1}{k_B T} \left(E_1 n_1 + E_2 n_2 + E_3 n_3 + E_4 n_4 \right) \right]$$

Man erhält den wahrscheinlichsten Zustand, wenn $\log W$, bzw. W maximal ist.

$$n_i = \frac{g_i}{g} N, \; g_i = \frac{p_i}{h^3}, \; g = \sum g_i$$

Daraus resultiert der wahrscheinlichste Zustand:

$$(n_1, n_2, n_3, n_4) = \left(\frac{\exp(-E_1/kT)}{g} N, \frac{\exp(-E_2/kT)}{g} N, \frac{\exp(-E_3/kT)}{g} N, \frac{\exp(-E_4/kT)}{g} N \right)$$

Wenn $T = 0$ gilt, dann ist die Wahrscheinlichkeit des auftretenden Zustandes gleich der minimalen Wahrscheinlichkeit, und das statistische Gewicht $W = 1$, entsprechend folgt die minimal mögliche Entropie $S = 0$.
Für $T \to \infty$ gehen die $p_i \to 1$, somit sind alle Zustände gleich verteilt. $W = \frac{N!}{4(\frac{N}{4})!}$, da die minimale Wahrscheinlichkeit für den Fall angenommen wird, dass für ein spezielles i gilt: $n_i = N$, $n_j = 0, i \neq j$, die maximale Wahrscheinlichkeit gilt bei Gleichverteilung. Die Entropie nimmt hier ihr Maximum an, die Teilchen sind nicht mehr unterscheidbar.

Aufgabe 26

Für das Gravitationsfeld mit der Dimension n, $\vec{g_n}(\vec{r})$, gilt:

$$\int \vec{g}_n(\vec{r}) \, \mathrm{d}\vec{A} = -\mathcal{C} M, \; \mathcal{C} = \text{const.}$$

Für Punktmassen folgt aufgrund der Kugelsymmetrie ($\vec{g}_n(\vec{r}) = g_n(r)\vec{e}_r$), sowie der Formel für die Oberfläche einer n-dimensionalen Kugel:

$$\int_{K_n} \vec{g}_n(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{A} = g_n(r)\int_{K_n} \mathrm{d}A = g_n(r) 2r^{n-1}\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} = -\mathcal{C}M$$
$$\Rightarrow \vec{g}_n(r) = -\mathcal{C}M\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2r^{n-1}\ \pi^{n/2}}\vec{e}_r$$

Für das Potential V_n, mit $\nabla V_n = -\vec{g}_n(r)$, folgt:

$$V_n(r) = \int \mathcal{C}M\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2r^{n-1}\ \pi^{n/2}}\vec{e}_r\,\mathrm{d}\vec{r} = \mathcal{C}M\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2(2-n)r^{n-2}\ \pi^{n/2}}\vec{e}_r$$

Die Bewegung erfolgt auch für $n \geq 3$ Dimensionen in einer Ebene, aufgrund der radialen Abhängigkeit, somit lässt sich die Energie schreiben als:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} + V_n(r)}_{V_{eff}}$$

Dabei erhält man für $n = 2$ den Logarithmus.
Eine gebundene Bewegung liegt vor, wenn $E > V_{eff}$ gilt, es folgt:

$$E > \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\mathcal{C}M}{2\pi}\log\frac{r}{r_0}, \quad n = 2$$
$$E > \frac{L^2}{2mr^2} + \mathcal{C}M\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2(2-n)r^{n-2}\ \pi^{n/2}}, \quad n \geq 3$$

Ein System heißt quasi ergodisch, falls jede Trajektorie jedem Punkt, der sich mit den äußeren Zwängen vereinbaren lässt, innerhalb endlicher Zeit beliebig nahe kommt. Entsprechend kann ein gebundenes Teilchen jeden Teil des Raumes passieren, für die r die oben genannten Bedingungen erfüllt.
Ersetzt man $V_n(r) \to V_n(r)\exp -\frac{r}{\lambda}$, so verschwindet für $n = 2$ die äußere Grenze des zulässigen Bereiches, der Zustand ist nicht mehr gebunden und kann bis zu einem minimalen Radius theoretisch jeden Punkt des Raumes erreichen.

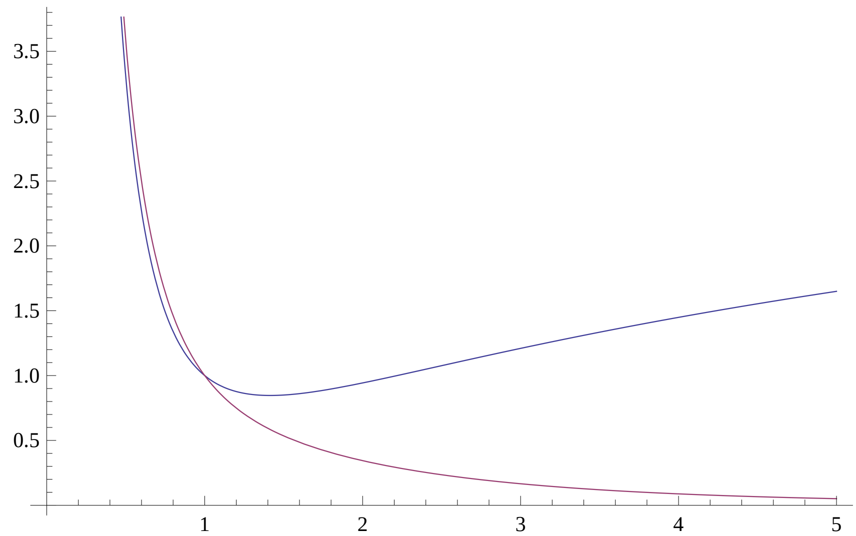

Abbildung 1: Blau dargestellt: das unmodifizierte Potential, Rot: Modifiziert.