Aufgabe 1

a)

Man kann sich auf elektrische Dipolwechselwirkung beschränken, sofern man die anderen Wechselwirkungsarten vernachlässigen kann. Da die Quadropolwechselwirkung sehr unwahrwahrscheinlich ist, kann man diese bei geringen Lichtintensitäten außen vor lassen, selbes gilt für magnetische Übergänge (magnetische Dipolstrahlung).

b)

Beachtet man die in vorherigen Übungsserien bereits diskutierten Übergangsregeln, so ergeben sich als mögliche Endzustände: $3S_{1/2}$,$2S_{1/2}$,$1S_{1/2}$, jeweils π-polarisiert, wenn der Ausgangszustand $3P_{3/2}$ ist, sowie σ^--polarisiert, wenn der Ausgangszustand $3P_{1/2}$ ist.

c)

Lebensdauer $\tau_i = 1/A_i$, $A_i = \sum A_{ij}$ Aus der Vorlesung ist bekannt:

$$A_{ik} = \frac{16}{3}\frac{\pi^3(h\nu_{ik})^3}{\epsilon_0 c^3 h^4}|M_{ik}|^2,$$
$$M_{ik} = e\int \psi^*_{n_1,l_1,m_1}\cdot\vec{r}\cdot\psi_{n_2,l_2,m_2}\,\mathrm{d}^3x$$

Mit den bekannten Wellenfunktionen (siehe vorherige Übungsserien+Mathematica), ergeben sich folgende Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
A_{3,1,0\to1,0,0} &\approx 1.6707\cdot10^8 s^{-1}, \qquad & A_{3,1,m\to1,0,0} &\approx 1.6707\cdot10^8 s^{-1}, m\neq0\\
A_{3,1,0\to2,0,0} &\approx 2.2424\cdot10^7 s^{-1}, \qquad & A_{3,1,m\to2,0,0} &\approx 2.2424\cdot10^7 s^{-1}, m\neq0\\
A_{3,1,0\to3,0,0} &\approx 3.2638\cdot10^6 s^{-1}, \qquad & A_{3,1,m\to3,0,0} &\approx 3.2638\cdot10^6 s^{-1}, m\neq0
\end{aligned}$$

Mit der angenommenen Gleichverteilung ergibt sich der effektive Koeffizient zu (+Vereinfachung, da man hier durch drei teilt, jedoch drei mal den gleichen Summanden addiert):

$$A_{3p} = \frac{1}{3}\sum A_{ij} = A_{3,1,0\to1,0,0} + A_{3,1,0\to2,0,0} + A_{3,1,0\to3,0,0} = 1.927578\cdot10^8 s^{-1}$$

Es folgt: $\tau = 5.18785\,\mathrm{ns}$

d)

Die Lebensdauer dieses Zustandes ist mit dieser Näherung unendlich, da es keinen möglichen elektrischen Dipolübergang in einer energetisch tieferes Niveau gibt. Entsprechend ist der Einstein-A-Koeffizient 0.

Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned}
&\omega_{12} = \rho(\nu)B_{12}, \quad \omega_{21} = \rho(\nu)B_{21}\\
&\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = -\omega_{12}N_1 + \omega21N_2 + A_{21}N_2 - N_1R' = -(\omega_{12}+R')N_1 + (\omega_{21}+A_{21})N_2\\
&\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -\omega_{21}N_2 + \omega12N_1 - A_{21}N_2 + R - N_2R' = \omega_{12}N_1 - (\omega_{21}+A_{21}+R')N_2 + R
\end{aligned}$$

Im stationären Zustand gilt: $\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = 0$, es folgt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -(\omega_{12}+R') & (\omega_{21}+A_{21}) \\ \omega_{12} & -(\omega_{21}+A_{21}+R') \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}$$

Man multipliziert nun von links mit dem Inversen der Matrix (existiert, wenn $|M| \neq 0$), und erhält:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} = \frac{R}{R'(\omega_{21}+\omega_{12}+A_{21}+R')} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{21}+A_{21} \\ \omega_{12}+R' \end{pmatrix}$$

b)

Ein Laser lässt sich bei Besetzungsinversion realisieren. Diese liegt vor, wenn gilt: $N_2 > N_1$, in diesem Beispiel folgt damit:

$$\omega_{12} + R' > \omega_{21} + A_{21} \overset{\omega_{21}=\omega_{12}}{\Rightarrow} R' > A_{21}$$