Aufgabe 14

a)

Die aus der Vorlesung bekannte Clousius-Clapeyron (CC) Gleichung lautet: $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta s}{\Delta v}$, außerdem gilt: $\mathrm{d}H = T\,\mathrm{d}S + V\,\mathrm{d}p$. Da der Schmelzvorgang *isobar* und *isotherm* abläuft, lässt sich schreiben: $\Delta H = T\Delta S$, eingesetzt ergibt dies die angegebene Formel. Außerdem gilt: $\frac{\Delta H}{\Delta V} = \frac{\Delta H_m}{\Delta V_m}$.

b)

Wir suchen die Temperaturänderung aufgrund der Druckänderung und gehen davon aus, dass die Ableitung des Drucks nach der Temperatur in einem kleinen Bereich konstant ist. $\mathrm{d}p$ ist die Druckänderung aufgrund des Schlittschuhfahrers, ΔV_m erhält man aus den unterschiedlichen Dichten von Eis und Wasser, die Molare Masse M von Wasser ist $18\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$, ΔH_m und T sind gegeben.

$$\Delta p = \frac{F}{A} = \frac{80 \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}}{0.3 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^2} = 26.16\,\mathrm{bar}$$

$$\rho = \frac{M}{V} \to \Delta V_m = \left(\frac{1}{\rho_{Eis}} - \frac{1}{\rho_{Wasser}}\right) = \left(\frac{1}{988} - \frac{1}{917}\right)\frac{m^3}{kg} = -7.83668 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}$$

$$\frac{\Delta H_m}{\Delta V_m}\int \frac{\mathrm{d}T}{T} = \int \mathrm{d}p \Rightarrow T_p = T_0 \exp\left[\frac{\Delta V_m}{\Delta H_m}\Delta p\right]$$

$$T_p = T_0 \exp\left[\frac{7.83668 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}}}{333.5\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{mol}}} 26.16\,\mathrm{bar}\right] = 0.999385 T_0 = 272.982\,\mathrm{K}, \Delta T = -0.167858\,\mathrm{K}$$

Man kann schlussfolgern, dass die Behauptung falsch ist, da die Temperatur nur minimal gesenkt wird.

c)

Wie man sieht, führt eine Druckerhöhung zu einem vernachlässigbaren Einfluss. Man könnte dieses Modell verbessern, indem man die zugeführte Wärme aufgrund der Reibung während des Laufens berücksichtigt. Diese Wärme wird dann in eine Temperaturerhöhung bis zum Schmelzpunkt umgerechnet, und aus der verbliebenen Energie lässt sich die Menge an geschmolzenem Wasser gewinnen.

Aufgabe 15

$$\text{Aufgabe 1a): } \mathrm{d}H = T\,\mathrm{d}S \to \frac{\partial H}{\partial T} = \mathrm{d}S + T\frac{\partial S}{\partial T}$$

$$\Delta\frac{\partial H}{\partial T} = \Delta S + T\frac{\partial \Delta S}{\partial T}$$

$$\Delta c_p = 0 + T\Delta\frac{\partial s}{\partial T}$$

$$\mathrm{d}\mu = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p = -s(T,p)\,\mathrm{d}T + v(T,p)\,\mathrm{d}p$$

$$\Delta\,\mathrm{d}\mu = -\Delta s\,\mathrm{d}T + \Delta v\,\mathrm{d}p, \quad \Delta s = 0, \quad \Delta v = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta s}{\Delta v} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \frac{\partial \Delta s}{\partial T} \cdot \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial T}\right)^{-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta c_p}{T\,\Delta v|_p}$$

Aufgabe 16

a)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} &= \frac{\Delta h}{T(v_g - v_f)} \overset{v_f \approx 0}{=} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{\Delta h}{T v_g} \\
pv &= RT \rightarrow \frac{1}{v} = \frac{p}{RT} \\
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} &= \frac{p \Delta h}{RT^2} \\
\int \frac{\mathrm{d}p}{p} &= \frac{\Delta h}{R} \int \frac{\mathrm{d}T}{T^2} \\
\log p|_{p_1}^{p_2} &= -\frac{\Delta h}{R} \left. \frac{1}{T} \right|_{T_1}^{T_2} \\
\log \frac{p_2}{p_1} &= \frac{\Delta h}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)
\end{aligned}$$

b)

Benutze Ergebnis aus *a)*:

$$\log \frac{p_2}{p_1} = \frac{\Delta h}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

Der ‘Außendruck’ ist aufgrund des verschlossenen Systems temperaturabhängig und wird über das ideale Gas modelliert. Dabei ist p_S Der Standarddruck von einem Bar und T_1 die Ausgangstemperatur.

$$p_\mathrm{A} = \frac{nRT}{V} = p_S \frac{T}{T_1}$$

Mit steigender Temperatur steigt auch der Druck in dem Dampfdrucktopf, der Dampfdruck steigt ebenfalls. Eine Flüssigkeit siedet, wenn ihr Dampfdruck p_D dem Umgebungsdruck p_A entspricht.

$$p_\mathrm{D} = p_\mathrm{A}$$

Für den Dampfdruck gilt die Dampfdruckformel von *Auguste*, dabei ist p_0 der Dampfdruck bei $T_1 = 20\,°\mathrm{C}$.

$$\begin{aligned}
p_\mathrm{D} &= \exp\left[\frac{\Delta h}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T} \right) \right] p_0 \\
\exp\left[\frac{\Delta h}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T} \right) \right] p_0 &= p_S \frac{T}{T_1}
\end{aligned}$$

Mit Mathematica erhält man:

$$T = 377.348\,\mathrm{K} = 104.198\,°\mathrm{C}$$

Ohne Ausdehnung des Gases erhält man eine Temperatur von $97.2934\,°\mathrm{C}$.