Aufgabe 8

a)

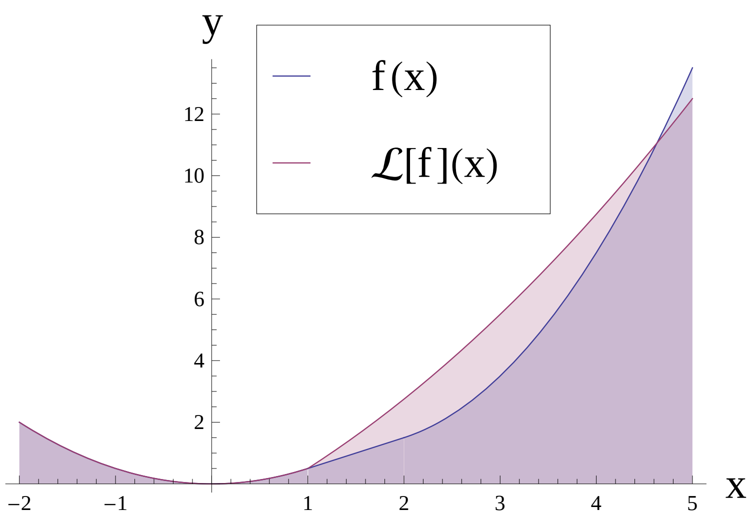
$$
\begin{aligned}
f(x) &= \exp x, y = f'(x) = \exp x \to x = \log y \\
\mathcal{L}[f](y) &= xy - f(x) = \log y \cdot y - \exp(\log(y)) = y \log y - y \\
\mathcal{L}[\mathcal{L}[f]](z) &= yz - \mathcal{L}[f](y), z = \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}[f(x)](y)}{\mathrm{d}y} = \log y + 1 - 1 = \log y, y = \exp z \\
\mathcal{L}[\mathcal{L}[f]](z) &= z \exp z - \exp(z) \log(\exp z) + \exp z = \exp z \\
&\Rightarrow f = \mathcal{L}\mathcal{L}[f]
\end{aligned}
$$

b)

Offensichtlich versagt das Verfahren beim zweiten Abschnitt der Funktion, da sich x nicht als Funktion von y darstellen lässt, da $y = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 1 \neq g(x)$. Für die anderen Bereiche der Funktion folgt:

$$
\begin{aligned}
f_{1,1}(x) &= \frac{1}{2}x^2, y_{1,1} = x \to \mathcal{L}[f_{1,1}](y) = y^2 - \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}y^2 \\
f_{1,3}(x) &= x^2 - 3x + \frac{7}{2}, y_{1,3} = 2x - 3 \to x = \frac{y+3}{2} \\
&\to \mathcal{L}[f_{1,3}](y) = \frac{1}{2}y(y+3) - \frac{1}{4}(y+3)^2 + \frac{3(y+3)}{2} - \frac{7}{2} = \frac{1}{4}\left(y^2 + 6y - 5\right)
\end{aligned}
$$

Beachtet man, dass man die Grenzen ebenfalls transformieren muss, folgt für den Startwert der dritten Funktion: $y_{start} = 2x_{start} - 3 = 4 - 3 = 1$, dadurch entsteht keine 'Lücke', die Funktion bleibt stetig.

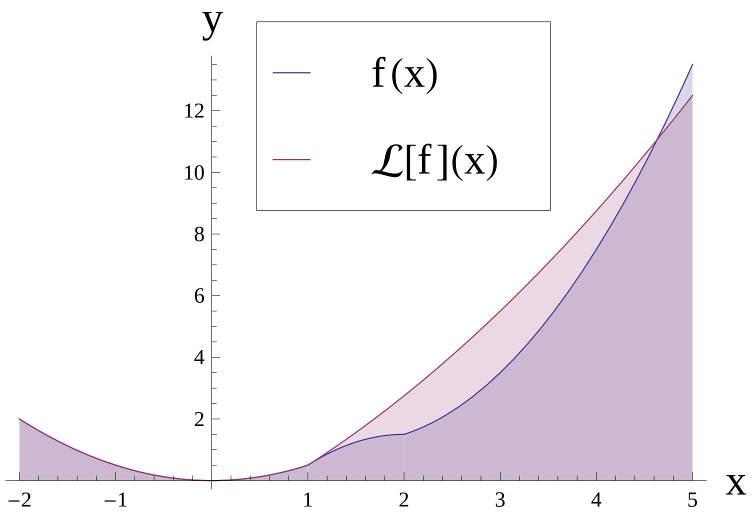


c)

Berechne Legendre Transformierte der Funktion im zweiten Abschnitt.

$$
\begin{aligned}
f_{2,2}(x) &= -x^2 + 4x - \frac{5}{2}, y_{2,2} = -2x + 4 \to x = \frac{4-y}{2} \\
&\to \mathcal{L}[f_{2,2}](y) = \frac{1}{2}y(4-y) + \frac{1}{4}(4-y)^2 - 2(4-y) + \frac{5}{2} = \frac{1}{4}\left(-y^2 + 8y - 6\right)
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Verschiebung der Grenzen ist diese Funktion erneut stetig.
Berechne die Legendre Transformiete der Transformierten:



$$\mathcal{L}\mathcal{L}[f_{2,1}](x) = \frac{1}{2}x^2 = f_{2,1}(x)$$

$$\mathcal{L}[f_{2,2}](x) = \frac{1}{4}\left(-x^2+8x-6\right), y = \frac{1}{4}(-2x+8) \rightarrow x = 4-2y$$

$$\mathcal{L}\mathcal{L}[f_{2,2}](x) = (4-2x)\,x - \frac{1}{4}\Big(-(4-2x)^2+8(4-2x)-6\Big) = -x^2+4x-\frac{5}{2} = f_{2,2}(x)$$

$$\mathcal{L}[f_{2,3}](x) = \frac{1}{4}\left(x^2+6x-5\right), y = \frac{1}{4}(2x+6) \rightarrow x = 2y-3$$

$$\mathcal{L}\mathcal{L}[f_{2,3}](x) = (2x-3)\,x - \frac{1}{4}\Big((2x-3)^2+6(2x-3)-5\Big) = x^2-3x+\frac{7}{2} = f_{2,3}(x)$$

Für die Startwerte folgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f_{2,1}](x): &\quad x_{end} = 1 \\
\mathcal{L}\mathcal{L}[f_{2,1}](x): &\quad x_{end} = 1 \\
\mathcal{L}[f_{2,2}](x): &\quad x_{start} = 2, \quad x_{end} = 0 \rightarrow \text{Bedingung nie erfüllt} \\
\mathcal{L}\mathcal{L}[f_{2,2}](x): &\quad x_{start} = 1, \quad x_{end} = 2 \\
\mathcal{L}[f_{2,3}](x): &\quad x_{start} = 1 \\
\mathcal{L}\mathcal{L}[f_{2,3}](x): &\quad x_{start} = 2
\end{aligned}$$

Die Funktion ergibt demnach wieder sich selbst: $\mathcal{L}\mathcal{L}[f_2] = f_2$

Aufgabe 9

a)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}U &= T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V && (1)\\
\mathrm{d}U &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V && (2)\\
(1)' \to \mathrm{d}S &= \frac{1}{T}\,\mathrm{d}U + \frac{p}{T}\,\mathrm{d}V && (3)\\
(2) \text{ in } (1)' \to \mathrm{d}S &= \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V\right] + \frac{p}{T}\,\mathrm{d}V && (4)\\
\mathrm{d}S &= \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] \mathrm{d}V && (5)\\
\text{da } S = S(T,V) \text{ gilt: } \mathrm{d}S &= \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V && (6)\\
\text{Koeffizientenvergleich: } &\Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V, \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] && (7)\\
\text{Satz von Schwarz: } &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial V}\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial S}{\partial V} && (8)\\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial V}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\right]_T &= \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\right]_V && (9)\\
\frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} &= -\frac{1}{T^2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] + \frac{1}{T}\frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V && (10)\\
\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] &= T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V && (11)\\
\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T &= T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p && (12)
\end{aligned}
$$

b)

Für das ideale Gas gilt: $p = nRT\frac{1}{V}$, daraus folgt:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \cdot \frac{nR}{V} - p = 0$$

Aufgabe 10

a)

Aus 9a) folgt:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T &= T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\\
f(T) &= T\frac{1}{3}f'(T) - \frac{1}{3}f(T)\\
4f(T) &= Tf'(T)\\
\to f(T) &= CT^4, C = \text{const.}\\
\Longrightarrow U(T,V) &= CVT^4, p(T) = \frac{1}{3}CT^4
\end{aligned}
$$

Für die Entropie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S &= \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] \mathrm{d}V \\
\mathrm{d}S &= 4CVT^2\,\mathrm{d}T + \frac{1}{T}\left[CT^4 + \frac{1}{3}CT^4\right] \mathrm{d}V \\
\mathrm{d}S &= 4CVT^2\,\mathrm{d}T + \frac{4}{3}CT^3\,\mathrm{d}V \\
\Rightarrow S(T,V) &= \frac{4}{3}CVT^3 \Rightarrow T = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\frac{S}{CV}} \Rightarrow U(S,V) = CV\left(\frac{3}{4}\frac{S}{CV}\right)^{\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
F(T,V) &= U(S,V) - TS = U(T,V) - TS \\
F(T,V) &= CVT^4 - T \cdot \frac{4}{3}CVT^3 = -\frac{1}{3}CVT^4
\end{aligned}$$

$$G(T,p) = F(T,V) + pV = -\frac{1}{3}CVT^4 + \frac{1}{3}CT^4V = 0$$