Aufgabe 1

Für das Skalarprodukt zweier Wasserstoffeigenfunktionen $\psi_{n,l,m_l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot R_{n,l}(r) \cdot \Theta^l_m(\theta) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$ gilt (vgl. Vorlesung:

$$\langle \psi_j \,|\hat{z}|\, \psi_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{r=0}^{\infty} R_j R_k r^3 \,\mathrm{d}r \cdot \int_{\theta=0}^{\pi} \Theta^{l_k}_{m_k} \Theta^{l_j}_{m_j} \sin\theta \cos\theta \,\mathrm{d}\theta \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m_k - m_j)\varphi} \,\mathrm{d}\varphi$$

Wie bereits diskutiert, müssen alle drei Produkte gleichzeitig verschieden von null sein. Man kann daraus schlussfolgern, dass $m_k = m_j$ gelten muss. Für die Parität von Θ^l_m gilt: $\hat{\mathrm{P}}\Theta^l_m = (-1)^l \Theta$. Da der verwendete Operator negativer Parität ist, muss eine Funktion gerade Parität haben, die andere ungerade (um einen Integranten ungerader Parität zu erhalten), es folgt: $l_k - l_j = 2a + 1, a \in \mathbb{N}$, n kann beliebig sein, da die Funktionen nicht orthonormal sind, sobald $l_k \neq l_j$.

Führe einen neuen Index $k = k(n, l, m_l)$ ein, um die Störmatrix $\left(\hat{\mathrm{H}}_{St}\right)_{n,l,m_l}$ aufzustellen. Wie man in der

k	n	l	m_l
1	2	0	0
2	2	1	-1
3	2	1	0
4	2	1	1

k'	l	m_l
1	0	0
2	1	0

linken Tabelle sehen kann, gibt es nur zwei mögliche k-Werte, für diese die oben genannten Bedingungen erfüllt sind. Aus diesem Grund lässt sich eine reduzierte Variable k' einführen. Für die Matrix folgt:

$$\left(\hat{\mathrm{H}}_{St}\right)_{k'} = \begin{pmatrix} 0 & H \\ H & 0 \end{pmatrix}, \quad H = eE\langle 2S_0 \,|z|\, 2P_0 \rangle$$

$$\langle 2S_0 \,|z|\, 2P_0 \rangle =$$

$$\int_{r=0}^{\infty} r^3 \,\mathrm{d}r \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\cos\theta \,\mathrm{d}\theta \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \left[\sqrt{\frac{1}{8a_0^3}} \left(-\frac{r}{a_0} + 2\right) e^{-r/2a_0} \cdot \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\right] \left[\sqrt{\frac{1}{24a_0^3}} \left(\frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0} \cdot \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta\right]$$

$$\text{Mathematica: } = -3a$$

Entsprechend erhält man die Energieeigenwerte E=$\pm 3aeE$, die normierten Eigenvektoren sind:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

a)

J kann sich um $0, \pm 1$ ändern, jedoch ist der Übergang von $J = 0 \to J = 0$ verboten. Die Betrag des Spins ändert sich nicht, jedoch kann sich die Ausrichtung bezüglich des Bahndrehimpulses ändern $\Delta m_s = \pm 1$. Die magnetische Quantenzahl m_j kann sich ebenfalls um $0, \pm 1$ ändern, so erhält man:

$$|J, m_j\rangle \to \begin{cases} |J, m_j \pm 0, 1, 2\rangle, J \neq 0 \\ |J \pm 1, m_j \pm 0, 1, 2\rangle \end{cases}$$

Dabei muss beachtet werden, dass nach wie vor gilt: $-J \leq m_j \leq J$, wobei J in diesem Fall das J nach der Zustandsänderung ist.

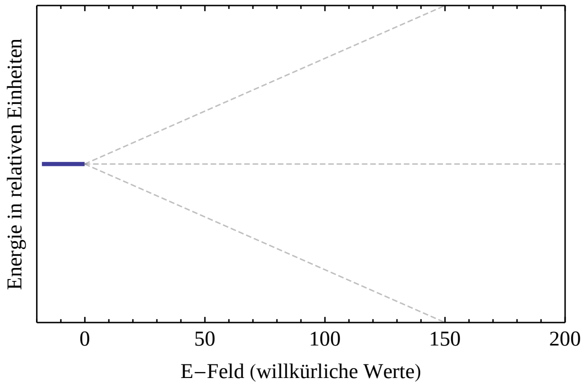

Abbildung 1: Die Aufspaltung der Niveaus aufgrund des Stark-Effekts. Die Energie des Zustandes v_1 steigt mit steigendem E-Feld an (Gerade nach oben), die Energie des Zustandes v_2 sinkt entsprechend (Gerade nach unten). Die Zustände mit $m_l = \pm 1$ bleiben energetisch konstant (Gerade parallel zur Achse des E-Feldes).

b)

Wie bereits bei *1)* gezeigt, müssen die Funktionen unterschiedliche Parität haben, was einen Integranten ungerader Parität ergibt. Exemplarische Rechnung:

$$\begin{aligned}\langle \phi \,|\hat{\mathrm{r}}|\, \psi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi^\dagger(r)\hat{\mathrm{r}}\psi(r)\,\mathrm{d}r = \int_{-\infty}^{0} \phi^\dagger(r)\hat{\mathrm{r}}\psi(r)\,\mathrm{d}r + \int_{0}^{\infty} \phi^\dagger(r)\hat{\mathrm{r}}\psi(r)\,\mathrm{d}r \\ &= -\int_{0}^{\infty} \phi^\dagger(-r)\hat{\mathrm{r}}\psi(-r)\,\mathrm{d}r + \int_{0}^{\infty} \phi^\dagger(r)\hat{\mathrm{r}}\psi(r)\,\mathrm{d}r = \begin{cases} 2\int_0^\infty \phi^\dagger(r)\hat{\mathrm{r}}\psi(r)\,\mathrm{d}r & \text{, gemischte Parität} \\ 0 & \text{, gleiche Parität} \end{cases}\end{aligned}$$

Wie bereits oben gezeigt muss die Differenz der l Quantenzahlen eine ungerade Zahl sein.

c)

Es ist $p_\lambda = \frac{E_\lambda}{c} = \frac{h}{\lambda}$. Für den Drehimpuls gilt, wenn r senkrecht auf p steht: $L = rp$, dadurch lässt sich r berechnen durch:

$$r = \frac{L}{p} = \frac{\lambda}{2\pi} = 106.761\,\mathrm{nm}$$

Dies ist um drei Größenordnungen über der gewöhnlichen Größe eines Atomkerns, von daher sehr unwahrscheinlich.