

**Aufgabe 1**

a)

Die Ursache liegt in der durch entstehende und sich wieder vernichtende Elektronen-Positronen-Paare verursachte minimalen Schwankung des E-Feldes und somit einer Änderung des Coulombpotentials. Die sich dadurch ändernde potentielle Energie führt zu einer Energieverschiebung von Zuständen mit gleichen Quantenzahl  $l$ .

b)

Aus der letzten Aufgabe der vorherigen Übungsserie wissen wir für die Energieaufspaltung in Folge des Zeeman-Effektes:

$$\begin{aligned} 2^2S_{1/2} : \quad g = 2, \quad \Delta E = 2m_j \cdot \mu_B B = \pm \mu_B B \\ 2^2P_{1/2} : \quad g = 2/3, \quad \Delta E = \frac{2}{3}m_j \cdot \mu_B B = \pm \frac{1}{3}\mu_B B \end{aligned}$$

Es gibt zwei mögliche Varianten, dass sich die Energieniveaus kreuzen. Entweder es sind beide Vorzeichen negativ, dann kreuzen beide bei der größeren Feldstärke, oder das  $2^2P_{1/2}$  Niveau ist im Gegensatz zum  $2^2S_{1/2}$  Niveau positiv. Die Energiedifferenz zwischen den beiden Grundniveaus sei die Lambverschiebung  $\Delta E_{Lamb}$ . Sie lässt sich einfach ausrechnen durch:

$$\begin{aligned} \mu_B B_1 + |\Delta E_{Lamb}| + \frac{1}{3}\mu_B B_1 = 0 \\ \mu_B B_2 + |\Delta E_{Lamb}| - \frac{1}{3}\mu_B B_2 = 0 \end{aligned}$$

Unabhängig davon, welche Lösungsmethode man für das überbestimmte Gleichungssystem verwendet, kommt man auf:  $\Delta E_{Lamb} = \frac{4}{3}\mu_B B_1 = 4.3683 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$  = Die Umrechnung in MHz geschieht auf Grundlage der Gleichung  $E = h\nu \rightarrow \nu = \frac{E}{h}$ ,  $[\nu] = \text{MHz}$ . Es folgt:  $\Delta E_{Lamb} = 1056.25 \text{ MHz}$ .

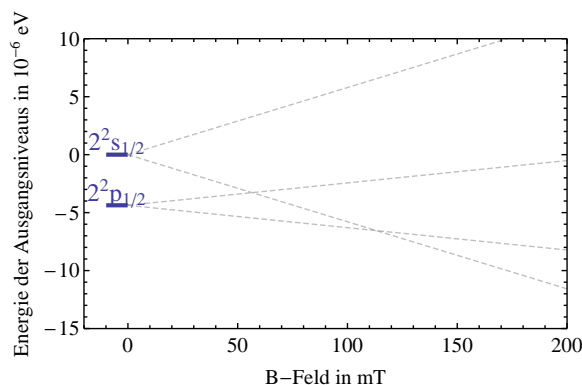


Abbildung 1: Die Aufspaltung aufgrund des Paschen-Back-Effekts in Abhängigkeit von  $B$ , für  $B > 0$ . Die Energie des  $2^2s_{1/2}$  Zustandes wurde hierbei auf 0 gesetzt.

c)

Wähle den Ansatz, dass sich die Energie aufgrund der reduzierten Masse um den Faktor  $\frac{1}{1 + \frac{m_e}{M}}$  ändert, wobei  $m_e$  die Masse des Elektrons und  $M$  die Gesamtmasse ist.

Für das normale Wasserstoffatom ergibt sich ein Korrekturfaktor von  $\frac{1}{1 + \frac{1}{1836}}$  und für das Deuterium

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2 \cdot 1836}}$$

Es ergibt sich ein Energieunterschied von:

$$\left( \frac{1}{1 + \frac{1}{2 \cdot 1836}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{1836}} \right) E_0 = 3.70228 \text{ meV} = 895 \text{ 206 MHz}$$

Dieser ist somit deutlich größer (3 Größenordnungen) als die Lambverschiebung.

## Aufgabe 2

a)

Benutze die Eigenfunktionen  $\psi_{n,l,m_l,m_s}$ .

Umformung von  $H_{SB}$  mit Hilfe von Kommutatorrelationen und der binomischen Formel:

$$\hat{S}\hat{L} = \frac{1}{2} \left( (\hat{L} + \hat{S})^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2 \right), \quad \hat{L} + \hat{S} = \hat{J}$$

Mit dieser Grundlage kann man die Eigenwerte der Störungshamiltonians berechnen:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{n,l,m_l,m_s} | \hat{H}_{SB} | \psi_{n,l,m_l,m_s} \rangle &= \langle \psi_{n,l,m_l,m_s} | \frac{e^2}{4m_e r} (\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2) | \psi_{n,l,m_l,m_s} \rangle \\ &= \frac{e^2}{4m_e} \frac{1}{n^2 a_0} \hbar^2 \underbrace{[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]}_{=:g} \\ \langle \psi_{n,l,m_l,m_s} | \hat{H}_Z | \psi_{n,l,m_l,m_s} \rangle &= \langle \psi_{n,l,m_l,m_s} | \frac{eB}{2m_e} (\hat{L}_Z + 2\hat{S}_Z) | \psi_{n,l,m_l,m_s} \rangle \\ &= \frac{eB}{2m_e} \hbar (m_l + 2m_s) \\ \langle \psi_{n,l,m_l,m_s} | \hat{H}_{SB} + \hat{H}_Z | \psi_{n,l,m_l,m_s} \rangle &= \mu_B \left( \frac{e}{2n^2 a_0} \hbar [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] + B(m_l + 2m_s) \right) \\ &=: \left( \hat{H}' \right)_{n,l,m_l,m_s} \rightarrow \Delta E^{(1)} = S^T \hat{H}' S \end{aligned}$$

Beim Wasserstoff sind alle Energieniveaus mit gleichen  $n$  entartet. Für  $n = 1$  vereinfacht sich das Problem, da nur die Abhängigkeit von  $m_s$  betrachtet werden muss. Man erhält hierbei eine bereits diagonalisierte Matrix und kann die Energieverschiebung ablesen, welche identisch ist zu dem bekannten Ergebnis:

$$\Delta E^{(1)} = 2m_s \mu_B B, \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

Da die Störungshamiltonians auf Operatoren zurückgeführt wurde, deren Eigenfunktionen die betrachteten Funktionen sind, ist die zu erwartende Matrix von  $(\hat{H}')_{n,l,m_l,m_s}$  auf alle Fälle diagonal, da die Funktionen orthogonal aufeinander stehen. Man kann daraus schlussfolgern, dass die Diagonaleinträge bereits die Energiekorrektur angeben. Dementsprechend gilt für die Energieniveaus des Wasserstoffatoms:  $E = E_n^0 + \Delta E_{n,l,m_l,m_s}$  mit

$$\Delta E_{n,l,m_l,m_s} = \mu_B \left( \frac{e}{2n^2 a_0} \hbar [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] + B(m_l + 2m_s) \right)$$

und speziell nur für den Paschen-Back-Effekt:

$$\Delta E_{n,m_l,m_s} = \mu_B B (m_l + 2m_s)$$

Man erkennt hier, dass die Energiekorrektur aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung bei steigendem  $B$  gegenüber dem Paschen-Back-Effekt vernachlässigt werden kann.

b)

**Spin-Bahn-Kopplung:** Die beiden s-Niveaus spalten erwartungsgemäß nicht auf, für die anderen beiden ergibt sich eine Aufspaltung von:

$$2^2P_{1/2} : g = -2, \quad \Delta E = g \frac{e\hbar}{2n^2a_0B} \cdot \mu_B B$$

$$2^2P_{3/2} : g = +1, \quad \Delta E = g \frac{e\hbar}{2n^2a_0B} \cdot \mu_B B$$

**Paschen-Back-Effekt** Der Paschen-Back-Effekt hebt die Entartung nicht komplett auf. Es ergibt sich eine Energiedifferenz von  $\Delta E = g\mu_B B$ :

$m_l$	$m_s$	$g$
1	+1/2	2
0	+1/2	1
-1	+1/2	0
1	-1/2	0
0	-1/2	-1
-1	-1/2	-2

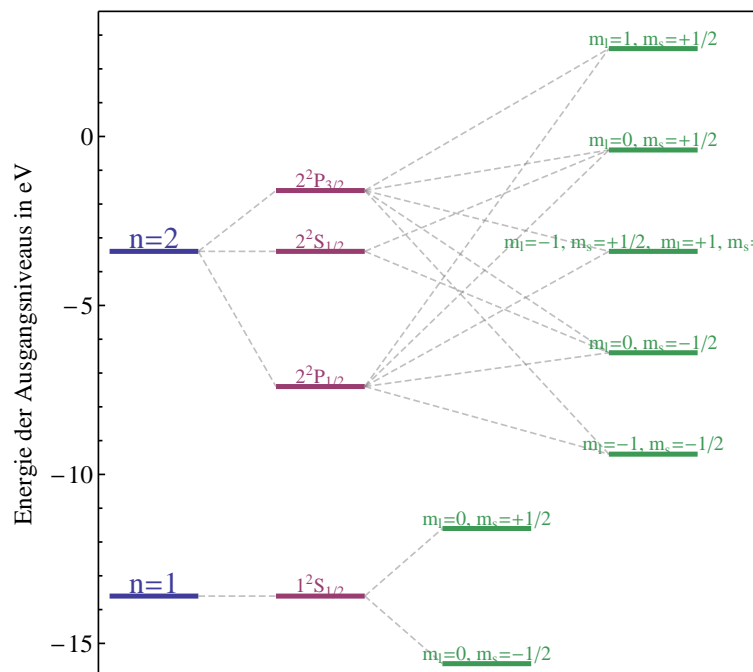


Abbildung 2: Violett: Die Aufspaltung aufgrund der LS-Kopplung. In grün dargestellt sind die resultierenden Aufspaltungen aufgrund des Paschen-Back-Effekts, diese sind in der Realität stärker gespreizt.