Aufgabe 1

Die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Maxwell-Boltzmann-Verteilung lautet:

$$F_0(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m_\mathrm{M}}{k_\mathrm{B}T}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp\left(-\frac{m_\mathrm{M}v^2}{2k_\mathrm{B}T}\right)$$

Multipliziert man dies entsprechend der Aufgabenstellung noch mit dem Faktor v. Dabei muss beachtet werden, dass diese Funktion nicht mehr normiert ist. Integration von $v = 0$ bis $v = \infty$ ergibt eine Konstante $\mathbf{F} = \sqrt{\frac{8k_BT}{m_M\pi}}$, durch welche geteilt werden muss:

$$F(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m_\mathrm{M}}{k_\mathrm{B}T}\right)^{\frac{3}{2}} v^3 \exp\left(-\frac{m_\mathrm{M}v^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) \frac{1}{\mathbf{F}}$$

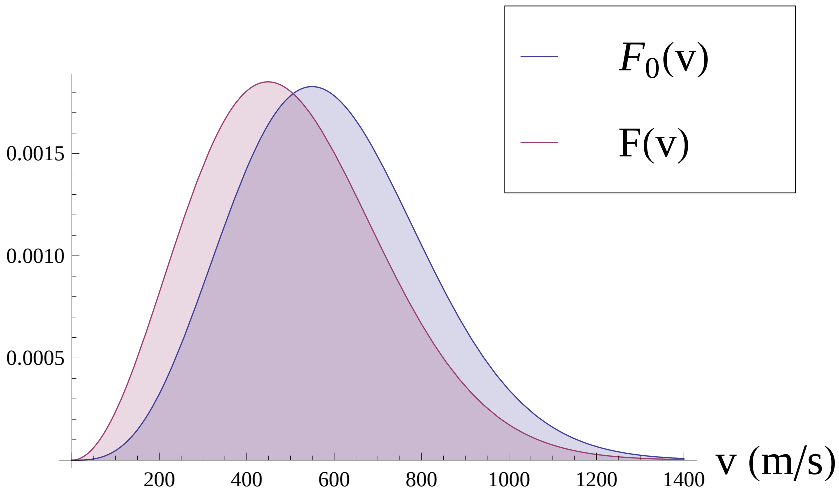

Abbildung 1: Die beiden Verteilungen im Vergleich für Silber bei $473.15\,K$

Die Intensitätsdichte auf der z-Achse ergibt sich zu $I(z) = F(z)I_0$, wobei $F(z)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte ist, das Teilchen an einem Punkt auf der z-Achse zu finden. Dabei wird für jede der beiden möglichen Spineinstellungen eine extra Funktion $F_{\pm 1/2}(z)$ genommen, sodass die Gesamtintensität $2I_0$ beträgt, wenn man von $-\infty$ bis ∞ integriert.
Der Teilchenstrahl wird als genügend schmal und parallel angenommen. Während des Durchgangs durch den Magneten erfahren die Teilchen eine Kraft: $\vec{F} = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} \vec{e}_z$. Diese Kraft verschiebt die Teilchen um eine Strecke Δz_m. Außerdem erhalten die Teilchen eine kinetische Energie in z-Richtung. $E_{kin_z} = \int \vec{F}\vec{e_z}\,\mathrm{d}s = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} \Delta z_m$. Da auf das Atom innerhalb des Magneten die Kraft $F = ma = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} = 2m_s\mu_b \frac{\partial B}{\partial z}$ wirkt, lässt sich mithilfe von $\Delta s = \frac{a}{2}t^2$ und $t = \frac{s_M}{v}$ die Verschiebung berechnen:

$$\Delta z_m(v) = \frac{F}{2m_M}\left(\frac{s_M}{v}\right)^2 = \frac{1}{2m_M} 2m_s\mu_B \frac{\partial B}{\partial z} \frac{s_m^2}{v_x^2}$$

$$E_{kin_z} = F_z \Delta z_m = \frac{m_M}{2} v_z^2 = \left(2m_s\mu_B \frac{\partial B}{\partial z}\right)^2 \frac{1}{2m_M} \frac{s_m^2}{v_x^2}$$

$$\rightarrow v_z = \frac{1}{m_M} 2m_s\mu_B \frac{\partial B}{\partial z} \frac{s_m}{v_x}$$

Damit lässt sich der Auftreffpunkt des Teilchen auf dem Schirm nach einer Distanz von $s_S = 0.45\,\mathrm{m}$ in Abhängigkeit von v ermitteln:

$$z(v) = s_S \frac{v_z}{v_x} + \Delta z_m(v) = s_M 2 m_s \mu_B \frac{\partial B}{\partial z} \frac{1}{m_M} \frac{1}{v_x^2} \left(s_S + \frac{s_m}{2} \right)$$

Dies lässt sich nach v auflösen, man erhält:

$$v(z) = \left[s_M 2 m_s \mu_B \frac{\partial B}{\partial z} \frac{1}{m_M} \left(s_S + \frac{s_m}{2} \right) \frac{1}{z} \right]^{1/2}$$

Durch Ableiten lässt sich der $\mathrm{d}z$ bestimmen:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{2}\frac{v}{z} \rightarrow \mathrm{d}v = -\frac{1}{2}\frac{v}{z}\mathrm{d}z$$

Dieses Ergebnis kann man nun in die Ausgangsformel für die Verteilung einsetzen und erhält so die Wahrscheinlichkeitsdichte in Abhängigkeit von der Position. Damit kann man nun die Intensität der beiden sich ergebenden Strahlen berechnen. Da man bei einer Integration der Wahrscheinlichkeitsdichte auch die Grenzen mit transformiert, müssen diese ebenfalls beachtet werden. Aufgrund der $\propto \frac{1}{z}$ - Abhängigkeit drehen sich die Grenzen bei der Transformation um. Wechselt man diese Grenzen wieder, wird das auftretende Minus kompensiert. Außerdem ist der Definitionsbereich der Funktion erst bei 0 beginnend und reicht bis ∞.

$$F(z) = \frac{1}{4} \left(\frac{m_\mathrm{M}}{k_\mathrm{B} T} \right)^2 \exp\left(-\frac{m_\mathrm{M} v^2}{2 k_\mathrm{B} T} \right) \frac{v^4}{z}$$
$$F(z) = \frac{1}{4} \left(\frac{m_\mathrm{M}}{k_\mathrm{B} T} \right)^2 \exp\left(-\frac{1}{k_\mathrm{B} T} s_M m_s \mu_B \frac{\partial B}{\partial z} \left(s_S + \frac{s_m}{2} \right) \frac{1}{z} \right) \left[s_M 2 m_s \mu_B \frac{\partial B}{\partial z} \frac{1}{m_M} \left(s_S + \frac{s_m}{2} \right) \right]^2 \frac{1}{z^3}$$

Die Masse von Kalium beträgt $m_M = 39.1\,\mathrm{u}$, die Inhomogenität beträgt $\dfrac{\partial B}{\partial z} = 40\,\dfrac{\mathrm{T}}{\mathrm{m}}$, das magnetische Moment kann die werte $\mu_z = 2 m_s \mu_b$, $m_s = \pm 1/2$, $\mu_b = \frac{e\hbar}{2m_e}$ annehmen, die Temperatur beträgt $T = 473.15\,\mathrm{K}$. Man sieht leicht, dass man statt zwei verschiedenen Funktionen $F_\pm(z)$ auch $F(\pm z)$ schreiben kann, um den unterschiedlichen Kurven aufgrund der verschiedenen Spineinstellungen Rechnung zu tragen.

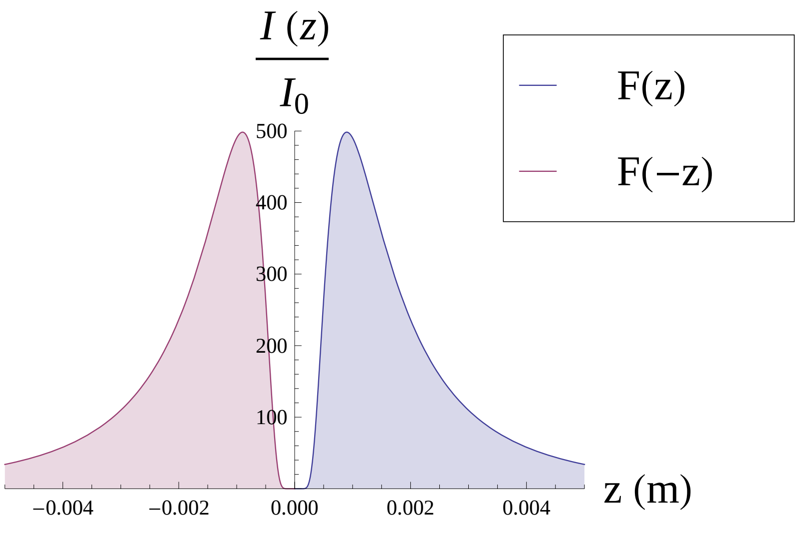

Abbildung 2: Die Intensität auf dem Schirm

Man erhält per Mathematica ein Maximum bei $z = \pm 0.89912\,\mathrm{mm}$.

Aufgabe 2

Die Wellenlängenenergie ist: $E = \frac{hc}{\lambda}$. Es folgt für die Energieunterschiede zwischen den Niveaus

$$\begin{aligned} 4^2P_{3/2} \to 4^2S_{1/2}: \quad & E_{393.4\,\text{nm}} = 3.15161\,\text{eV} \\ 4^2P_{1/2} \to 4^2S_{1/2}: \quad & E_{396.9\,\text{nm}} = 3.12381\,\text{eV} \\ & \Delta E_{FS} = 0.02779\,\text{eV} \end{aligned}$$

Aufgrund des anomalen Zeeman-Effekts kommt es zu einer Aufspaltung der Energie von $\Delta E = \frac{e\hbar}{2m_0} g \Delta m_j B_z, g = 1 + \frac{j(j+1)-l(l+1)+s(s+1)}{2j(j+1)}$. Die Gesamtdrehimpulsquantenzahl m_j kann zwischen $\pm j$ liegen. Für die Aufspaltungsnergien gilt:

$$\begin{aligned} 4^2S_{1/2}: \quad & g = 2, \quad & \Delta E = 2m_j \cdot \mu_\text{B} B \\ 4^2P_{1/2}: \quad & g = 2/3, \quad & \Delta E = \frac{2}{3} m_j \cdot \mu_\text{B} B \\ 4^2P_{3/2}: \quad & g = 4/3, \quad & \Delta E = \frac{4}{3} m_j \cdot \mu_\text{B} B \end{aligned}$$

Man kann ablesen, dass die Energiedifferenz zwischen benachbarten Niveaus $2, \frac{2}{3}$ und $\frac{4}{3}$ multipliziert mit $\mu_B B$ betragen. Es gelten die Auswahlregeln: $\Delta l = \pm 1$, $\Delta j = 0, \pm 1$ und $\Delta m_j = 0, \pm 1$. Blaue Übergänge bedeuten $m_j = +1$: links zirkulär polarisiertes Licht. Gelbe Übergänge stehen für $m_j = 0$, linear polarisiertes Licht und grüne Übergänge für $m_j = -1$, rechts zirkulär polarisiertes Licht.

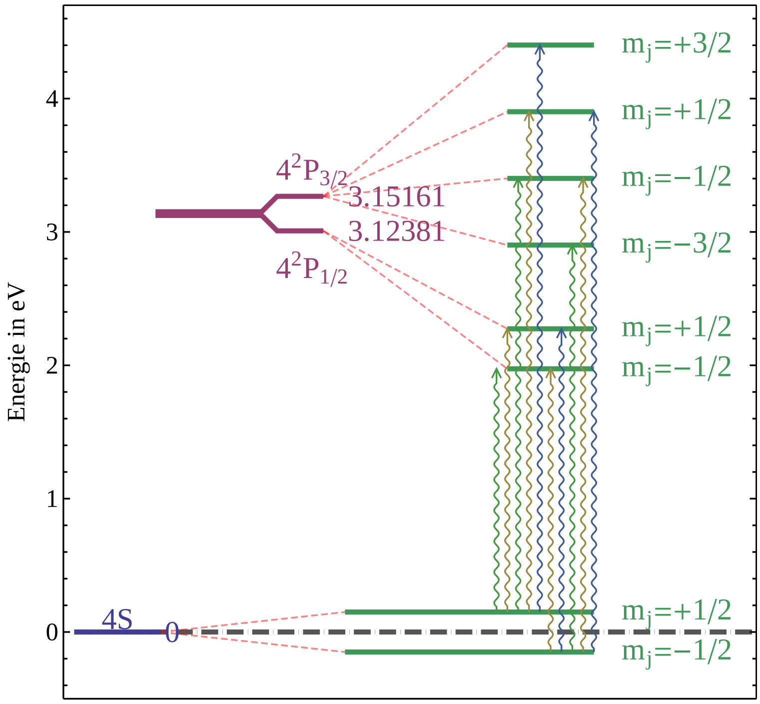

Abbildung 3: Das Termschema, die Zeemanaufspaltung ist nicht maßstabsgetreu