Aufgabe 1

a)

Es gilt: $M = \frac{m}{n}, pV = nRT, 1\,\text{bar} = 10^5\,\text{Pa} = 10^5\,\frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}$, daraus folgt:

$$n = pV/RT = \frac{10^5 \cdot 70}{8,314 \cdot 293}\,\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{K} \cdot \text{mol} \cdot \text{s}^2}{\text{m} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2} = 2873{,}56\,\text{mol} \rightarrow m = M \cdot n = 83{,}23\,\text{kg}$$

b)

Durch einfaches Ausklammern von p folgt:

$$\Delta n = n_8 - n_1 = (8-1)n = 7n = 20114{,}93\,\text{mol} \rightarrow \Delta m = 582{,}62\,\text{kg}$$

Aufgabe 2

a)

$\mathrm{d}U = \delta Q - \delta W = \delta Q - p\,\mathrm{d}V = nC_\mathrm{V}\mathrm{d}T, n = 1\,\text{mol}$

Isobarer Prozess p ist unabhängig von V, damit ist die Integration trivial. (Beginnend bei T_1, V_1, endend bei T_2, V_2). Es gilt:

$$p = \text{const.} = \frac{nRT}{V} = \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{nRT_2}{V_2}, p\Delta V = nR\Delta T$$

Daraus folgt, mit $\Delta V = V_2 - V_1 = V_1$.

$$W_{12} = \int_1^2 p\,\mathrm{d}V = p\Delta V = \frac{nRT_1}{V_1}V_1 = nRT_1 = nR\Delta T$$

Isothermer Prozess Da $p = p(V)$ muss dies bei der Integration durch V ausgedrückt werden.

$$W_{12} = \int_1^2 p\,\mathrm{d}V = nRT_1 \int_{V1}^{V2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = nRT_1 \ln 2$$

b)

Beim Isobaren Prozess muss Arbeit gegen einen konstanten Druck verrichtet werden, während dieser beim Isothermen Prozess sinkt.

c)

Isobarer Prozess Mit den Ergebnissen aus a), insbesondere $\Delta T = T_1$ folgt:

$$nC_\mathrm{V}\mathrm{d}T = \delta Q + \delta W \rightarrow Q = nC_\mathrm{V}\Delta T + nR\Delta T1 = nC_\mathrm{p}\Delta T = nC_\mathrm{p}T_1$$

Isothermer Prozess Da die Temperatur konstant bleibt, bleibt auch die innere Energie konstant und es gilt $\Delta U = 0 \rightarrow Q = W = nRT_1 \ln 2$.

Aufgabe 3

a)

Das Linienintegral ist wegunabhängig, wenn die Rotation verschwindet: $\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$.

$$12xy - 3y^2 - 12xy + 3y^2 = 0$$

Daraus folgt, das es wegunabhängig ist.

b)

Wähle den Weg von $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ über $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b X\,dx + Y\,dy &= \int_{x=1,y=2}^{x=3,y=2} X\,dx + \int_{x=3,y=2}^{x=3,y=2} Y\,dy \\
&= \int_{x=1,y=2}^{x=3,y=2} (6xy^2 - y^3)\,dx + \int_{x=3,y=2}^{x=3,y=4} (6x^2y - 3xy^2)\,dy \\
&= \left[3x^2y^2 - xy^3\right]_{x=1,y=2}^{x=3,y=2} + \left[3x^2y^2 - xy^3\right]_{x=3,y=2}^{x=3,y=4} \\
&= (108 - 24 - 12 + 8) + (432 - 192 - 108 + 24) \\
&= 236
\end{aligned}$$

c)

Finde F durch scharfes anschauen: $F = 3x^2y^2 - xy^3 \to dF = \left(6xy^2 - y^3\right)\,dx + \left(6x^2y - 3xy^2\right)\,dy$

$$\begin{aligned}
\int_a^b dF = [F]_{x=1,y=2}^{x=3,y=4} &= \left[3x^2y^2 - xy^3\right]_{x=1,y=2}^{x=3,y=4} \\
&= 432 - 192 - 12 + 8 = 236
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a)

Zeige durch Ableiten.

$$\frac{\partial xy}{\partial y} = x \neq 2x = \frac{\partial x^2}{\partial x}$$

b)

Probiere $g(x,y) = g(y) = y \to \frac{\partial xy^2}{\partial y} = 2xy = 2xy = \frac{\partial x^2 y}{\partial x}$. Man kann leicht die Funktion F erkennen:

$$F = \frac{1}{2}x^2y^2 \to dF = xy^2\,dx + x^2y\,dy$$