Übungsserie QM
10.05.12

Tim Nitzsche
120836

Übungsgruppe:

Di: 08-10Uhr

Aufgabe 3

es gilt: $\hat{P}_\varphi \psi = \langle\varphi|\psi\rangle\varphi \hat{=} |\varphi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle \to \hat{P}_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$

außerdem: $\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$ (normiert)

$\hat{P}_\varphi$ ist hermitesch und idempotent: $(|\varphi\rangle\langle\varphi|)^+ = |\varphi\rangle\langle\varphi|$

$(|\varphi\rangle\langle\varphi|)(|\varphi\rangle\langle\varphi|) = |\varphi\rangle\langle\varphi|\varphi\rangle\langle\varphi| = |\varphi\rangle\langle\varphi|$

zz: • $\hat{P}_\varphi^2 = P_\varphi P_\varphi = P_\varphi$ → siehe hier

• $(1-\hat{P}_\varphi)^2 = (1-\hat{P}_\varphi)$: $(1-|\varphi\rangle\langle\varphi|)(1-|\varphi\rangle\langle\varphi|)$

$= 1(1-|\varphi\rangle\langle\varphi|) - |\varphi\rangle\langle\varphi|(1-|\varphi\rangle\langle\varphi|)$

$= 1 - |\varphi\rangle\langle\varphi| - |\varphi\rangle\langle\varphi| 1 + |\varphi\rangle\langle\varphi|\varphi\rangle\langle\varphi|$

$= 1 - |\varphi\rangle\langle\varphi|$

• $(1-\hat{P}_\varphi)\hat{P}_\varphi = 0$: $(1-|\varphi\rangle\langle\varphi|)|\varphi\rangle\langle\varphi| = |\varphi\rangle\langle\varphi| - |\varphi\rangle\langle\varphi|\varphi\rangle\langle\varphi| = \underline{\underline{0}}$

Aufgabe 1

a) Ansatz: $f(x) = A_1 e^{i\lambda x} = B\cos\lambda x + A\sin\lambda x$

• $f(0) = 0 \to B = 0$

• $f(L) = 0 \to \lambda = \frac{n\cdot\pi}{L} \to f(x) = A\sin(\frac{n\pi}{L}x)$

→ DGL: $-\lambda^2 \cdot f(x) + k^2 f(x) = 0 \to \underline{k^2 = (\frac{n\pi}{L})^2}$, $n\in\mathbb{N}$

b) $1 = \int_0^L dx\, A^2 \sin^2(\frac{n\pi}{L}x)$ → Subst. $x' = \frac{n\pi}{L}x \to dx = \frac{L}{n\pi}dx'$

$1 = \frac{L}{n\pi}\int_0^{n\pi} \sin^2 x' dx' \cdot A^2$

$= \frac{L}{n\pi}A^2 \cdot \frac{1}{2}n\pi \to \underline{\underline{A^2 = \frac{2}{L}}}$

c) allg. Lösung: $f_k(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\sqrt{k}x)$

Lösungen sind orthogonal, d.h. $\langle f_i(x), f_k(x)\rangle = \delta_{ik}$, $i,k = n\cdot\frac{\pi}{L}$, $n\in\mathbb{N}$

da bekanntermaßen gilt: $\langle\sin(mx), \sin(nx)\rangle = \delta_{mn}$, folgt dies auch für die Lösungen von k.

Aufgabe 2

a) $\psi^*\psi$: $\psi = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\,a(t)}}\exp[ik_0x - \frac{i}{\hbar}\frac{(\hbar k_0)^2}{2m}t - \frac{(x-x_0-\frac{\hbar k_0}{m}t)^2}{2a\,a(t)}]$

$\to \psi^*\psi = [(\pi)^{1/2}a(t)]^{-1/2}[(\pi)^{1/2}a^*(t)]^{-1/2}\exp[\frac{-(x-x_0-\frac{\hbar k_0}{m}t)^2}{a|a|^2(t)}\cdot(\bar{a}(t)+a(t))]$

$= [\pi a^2(1+\frac{1}{a^2}\frac{i\hbar t}{m})(1-\frac{1}{a^2}\frac{i\hbar t}{m})]^{-1/2}\exp[\frac{-(x-x_0-\frac{\hbar k_0}{m}t)^2}{a\cdot|a|^2(t)}(\bar{a}(t)+a(t))]$

$= [\pi a^2(1+\frac{1}{a^4}\frac{\hbar^2t^2}{m^2})]^{-1/2}\exp[\frac{-(x-x_0-\frac{\hbar k_0}{m}t)^2}{a\cdot|a|^2(t)}(\bar{a}(t)+a(t))]$

b) ~~Norm: $\|\psi\|^2 = \int\bar{\psi}\psi dx$~~

zeitliche Abhängigkeit: Für feste x sinkt $\psi^*\psi$ mit der Zeit, dies entspricht physikalisch dem Zerlaufen von Wellenpaketen.

~~b) Norm:~~ $\|\psi\|^2 = \int_{-\infty} \bar{\psi}\psi \, dx$

$$= \left[\pi a^2 \left(1+\frac{1}{a^4}\frac{\hbar^2 t^2}{m^2}\right)\right]^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx$$

mit $\mu = -x_0 - \frac{\hbar k_0}{m} t$

$$\sigma^{-1} = \sqrt{\frac{\bar{a}(t) + a(t)}{a|a|^2(t)}} = \sqrt{\frac{2a}{1+\frac{1}{a^4}\frac{\hbar^2 t^2}{m^2}} \frac{1}{a}}$$

$$\to \|\psi\|^2 = \left[\pi a^2 \left(1+\frac{1}{a^4}\frac{\hbar^2 t^2}{m^2}\right)\right]^{-1/2} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sigma$$

$$= \left[\frac{1}{a^2\left(1+\frac{1}{a^4}\frac{\hbar^2 t^2}{m^2}\right)}\right] \cdot \cancel{a^4}$$

a) $$\psi^*\psi = \left[(\pi)^{1/2} a(t) \cdot (\pi)^{1/2} \bar{a}(t)\right]^{-1/2} \cdot \exp\left[-\frac{(x-x_0-\frac{\hbar k_0}{m}t)^2}{2a \cdot a(t)}\right] \cdot \exp\left[-\frac{(x-x_0-\frac{\hbar k_0}{m}t)^2}{2a \cdot \bar{a}(t)}\right]$$

$$= \left[\pi \, |a(t)|^2\right]^{-1/2} \cdot \exp\left[-\frac{(x-x_0-\frac{\hbar k_0}{m}t)^2}{2a\,|a(t)|^2}\left(\bar{a}(t)+a(t)\right)\right]$$

$\bar{a}(t)+a(t) = 2a$ $\quad \to \underline{\psi^*\psi = \left[\pi \, |a(t)|^2\right]^{-1/2} \cdot \exp\left[-\frac{(x-x_0-\frac{\hbar k_0}{m})^2}{|a(t)|^2}\right]}$

Zeitliche Abhängigkeit:
- im Nenner: $\hat{=}$ zerfließen des Wellenpaketes
- im Nenner des Exponenten:

b) $$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}\psi \, dx = \left[\pi \, |a(t)|^2\right]^{-1/2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx}_{= \sqrt{2\pi} \cdot \sigma}$$

mit $\mu = x_0 + \frac{\hbar k_0}{m}$, $\sigma = \left[|a(t)|^2\right]^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\|\psi\|^2 = \left[\pi \cancel{|a(t)|^2}\right]^{-1/2} \cdot [\pi]^{1/2} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cancel{|a(t)|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{1}}$$

c) Mithilfe der Definition des Skalarprodukt, dem Kommutativgesetz für die Faktoren innerhalb des Integrals sowie dem Nutzen der bekannten Eigenschaften der Normalverteilung, lässt sich diese Aufgabe abkürzen.

$$\to \underline{\bar{x} = \mu = x_0 + \frac{\hbar k_0}{m}}$$

$$\to \underline{(\Delta x)^2 = \sigma^2 = \frac{1}{2} |a(t)|^2}$$

d) Betrachte nur Exponenten, erstmal:

$$\left[ik_0 x - \frac{i}{\hbar}\frac{(\hbar k_0)^2}{2m} t - \frac{1}{2a \cdot a(t)}\left[x^2 + \left(x_0 - \frac{\hbar k_0}{m} t\right)^2 - 2x\left(x_0 - \frac{\hbar k_0}{m} t\right)\right]\right]$$

$$= \left[-\frac{i}{\hbar}\frac{(\hbar k_0)^2}{2m} t - \frac{1}{2a \cdot a(t)}\left[x^2 + \left(x_0 - \frac{\hbar k_0}{m} t\right)^2 - 2x\left(x_0 - \frac{\hbar k_0}{m} t - a \cdot a(t) \cdot i k_0\right)\right]\right]$$

quadr. Ergänz.

$$= \left[-\frac{i}{\hbar}\frac{(\hbar k_0)^2}{2m} t - \frac{1}{2a \cdot a(t)}\left[\left(x - x_0 - \frac{\hbar k_0}{m} t - a \cdot a(t) i k_0\right)^2 + \left(\underbrace{x_0}_{a} - \underbrace{\frac{\hbar k_0}{m} t}_{b}\right)^2 - \left(\underbrace{x_0}_{a} - \underbrace{\frac{\hbar k_0}{m} t}_{b} - \underbrace{a \cdot a(t) i k_0}_{c}\right)^2\right]\right]$$

$(a-b)^2 - (a-b-c)^2 = c(2a-2b-c)$

Übungsserie QM
-Serie 4-
14.05.12
Tim Nitzsche
120836

$$= \left[-\frac{i}{\hbar}\frac{(\hbar k_0)^2}{2m}t - \frac{1}{2\cdot a\cdot a(t)}\left[(x-x_0-\frac{\hbar k_0}{m}t - a\cdot a(t) i k_0)^2 + a\cdot a(t) i k_0 (2x_0 - 2\frac{\hbar k_0}{m}t - a\cdot a(t) i k_0) \right] \right]$$

$$= \left[-\frac{1}{2\cdot a\cdot a(t)}\left[x-x_0-\frac{\hbar k_0}{m}t - a\cdot a(t) i k_0 \right]^2 \right] - i k_0 x_0 + i k_0 \frac{\hbar k_0}{m} t + \frac{1}{2}(i k_0)^2 - \frac{i}{\hbar}\frac{(\hbar k_0)^2}{2m}t$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \right] - i\left(k_0 x_0 - \frac{i}{\hbar}\frac{(\hbar k_0)^2}{2m}t \right) - \frac{1}{2}k_0^2$$

$$\mu = x_0 + \frac{\hbar k_0}{m}t + a\cdot a(t) i k_0$$

$$\sigma = \sqrt{a\cdot a(t)}$$

$$FT\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \right] = (2\pi)^{-1/2}\frac{1}{\sigma}\left(\exp\left[-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right] + i\cdot\mu\omega\right)$$

$$\rightarrow FT[\Psi]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\, a(t)}}\cdot \exp\left[-i\left(k_0 x_0 - \frac{i}{\hbar}\frac{(\hbar k_0)^2}{2m}t\right) - \frac{1}{2}k_0^2\right] FT\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)\right]$$

$$= \left[\sqrt{\pi}\, a(t)\right]^{-1/2} \exp\left[-i\left(k_0 x_0 - \frac{i}{\hbar}\frac{(\hbar k_0)^2}{2m}t\right) - \frac{1}{2}k_0^2\right]\cdot(2\pi)^{-1/2}\cdot\frac{1}{\sigma}\left(\exp\left[-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right] + i\mu\cdot\omega\right)$$

oder so ähnlich.