Übungsserie QM
- Serie 11 -
07.07.12

Übungsgruppe
Di: 08-10

Tim Nitzsche
120836

Aufgabe 27

Aus der Vorlesung bekannt: für die Eigenzustände $\psi_n(x)$ mit $H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$, $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ des harmon. Oszillators gilt:

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left[2^n n!\right]^{-1/2} H_n(\underbrace{\sqrt{2}\alpha}_{=1} x)\, e^{-\alpha^2 x^2}$$

hier gilt: $\omega = \hbar/m$, $\alpha = 1/\sqrt{2}$

$$\rightarrow n=1: \quad \underline{\psi_1(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2x\cdot e^{-x^2/2}}$$

$$n=2: \quad \underline{\psi_2(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4}\frac{1}{\cancel{2}\cdot\sqrt{2}}\cdot\left[\cancel{4}^{2}x^2 - \cancel{2}^{1}\right]e^{-x^2/2}}$$

a) Betrachte: $[2(x-1)^2-3] = [2x^2-4x+2-3] = [\underbrace{2x^2-1}_{\sim\psi_2}] + [\underbrace{-4x}_{\sim\psi_1}]$

→ Koeffizientenvergleich: ~~$\varphi_0(x)=$~~

$$\underline{\varphi_0(x) = c\cdot\pi^{1/4}\cdot\sqrt{2}\,\left[\psi_2(x) - 2\psi_1(x)\right]}$$

Es gilt: (für Eigenzustände)

$$\psi_n(x,t) = \psi_n(x,0)\, e^{-iE_n t/\hbar}, \quad E_n = \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2})$$

$$\rightarrow \underline{\varphi(x,t) = c\cdot\pi^{1/4}\sqrt{2}\left[\psi_2(x)\cdot\exp(-i\hbar\omega\cdot t/\hbar) - 2\psi_1(x)\right]\exp(-iE_1 t/\hbar)}$$

normiert man $\varphi_0(x)$, so folgt

$$\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle = 1 = c^2\pi^{1/2}\cdot 2\left[\underbrace{\|\psi_2\|^2}_{=1} + 4\underbrace{\|\psi_1\|^2}_{=1}\right] \quad \text{(Mischterme fallen weg)}$$

$$\rightarrow c^{-2} = 10\sqrt{\pi}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{10\sqrt{\pi}}} \quad \rightarrow \psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\psi_2(x,t) - 2\psi_1(x,t)\right]$$

b) Superposition zweier Wellenfunktionen mit E_1, E_2 → es sind nur E_1 und E_2 anzutreffen. Offensichtlich verschwindet die Zeitabhängigkeit.

$$\underline{w_{E_2}} = |\alpha_2|^2 = |\langle\psi_2|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 1\right|^2 = \underline{\frac{1}{5}} \quad \rightarrow \underline{w_{E_1}} = \left|\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 4\right|^2 = \underline{\frac{4}{5}}$$

Energieerwartungswert: $\langle\psi|H|\psi\rangle = \sum_n E_n|\alpha_n|^2 = \hbar\omega\left[\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}\right]$

$$\underline{= \hbar\omega\left[\frac{17}{10}\right]}$$

c) $\langle\psi|A|\psi\rangle$

$= (\langle 1|\alpha_1 + \langle 2|\alpha_2)A(|\alpha_1 1\rangle + |\alpha_2 2\rangle)$

Lin. $=$ + $A(\alpha_1|1\rangle + (\langle 1|\alpha_1 + \langle 2|\alpha_2)A(\alpha_1|1\rangle)$

Lin. $= \langle 1|\alpha_1 A\alpha_1|1\rangle + \langle 2|\alpha_2 A\alpha_2|2\rangle + \underline{\langle 1|\alpha_1 A\alpha_2|2\rangle} + \langle 2|\alpha_2 A\alpha_1|1\rangle$

$z+\bar{z} = 2\mathrm{Re}\,z$ $= \sum_i w_i\langle i|A|i\rangle + \langle 1|\alpha_1 A\alpha_2|2\rangle + \overline{\langle 1|\alpha_1 A\alpha_2|2\rangle}$

Lin. $= \sum_i w_i\langle i|A|i\rangle + 2\mathrm{Re}\left[\alpha_1^*\alpha_2\langle 1|A|2\rangle\right]$

Aus der Vorlesung bekannt:

$$x = \frac{1}{2\alpha}(a^\dagger + a) \qquad a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{i\alpha p}{\hbar}\right)$$

$$p = i\hbar\alpha(a^\dagger - a) \quad \text{mit} \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{i\alpha p}{\hbar}\right) \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Außerdem wissen wir: $[a, a^+] = 1$, $N := a^+ a$

sowie: $a^+ a = \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + \frac{1}{2m\omega\hbar} p^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow H = \hbar\omega(a^+ a + \frac{1}{2}) = \hbar\omega(N + \frac{1}{2})$

→ Zurück zur eigentlichen Aufgabe: ($k=0$: sinnlos)

$\underline{k=1}$: $\langle\varphi|x|\varphi\rangle = \langle\varphi|\frac{1}{2\alpha}(a^+ + a)|\varphi\rangle$

| φ seien in dieser Aufgabe Eigenfunktionen, der Zusammenhang zum φ der Aufgabe kann durch Linearkombination hergestellt werden, ~~da wir jedoch 1 0 als Ergebnis erwarten, reicht allg. die Betrachtung einer beliebigen Eigenfunktion.~~

Aus dem Script folgt mit Formel 7.16: $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$, $a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$\rightarrow a^+|n\rangle \perp |n\rangle \perp a|n\rangle \Rightarrow x|n\rangle \perp |n\rangle$

selbes folgt für p

$\Rightarrow \langle\varphi|x|\varphi\rangle = \langle\varphi|p|\varphi\rangle = \underline{0}$

denn $\langle\varphi_n|\varphi_{n\pm1}\rangle = 0$ → jedoch kann hier für $\langle\varphi_n|x|\varphi_m\rangle \neq 0$ folgen, für $m \neq n$ → siehe d) zweiter Teil

| Nenne jetzt die Eigenfunktion wegen der Übersichtlichkeit $|\psi_n\rangle$, mit EW E_n

$\underline{k=2}$: $x^2 = \left(\frac{1}{2\alpha}(a^+ + a)\right)^2$ $p^2 = (i\hbar\alpha(a^+ - a))^2$

$\rightarrow x^2 = \frac{1}{4\alpha^2}(a^+ a^+ + a^+ a + a a^+ + aa)$

$\rightarrow p^2 = -\hbar^2\alpha^2(a^+ a^+ - a^+ a - a a^+ + aa)$

$[a, a^+] = 1$
$\rightarrow a a^+ - a^+ a = 1$
$\rightarrow a a^+ = 1 + a^+ a$

wegen $a|n\rangle \perp |n\rangle$ folgt auch $a(a|n\rangle) \perp |n\rangle$, analog für a^+ → Betrachte nur $a^+ a$, $a a^+$

$\rightarrow \langle\psi_n|x^2|\psi_n\rangle = \frac{1}{4\alpha^2}\langle\psi_n|a^+ a + a a^+|\psi_n\rangle = \frac{1}{4\alpha^2}\langle\psi_n|2\underbrace{a^+ a}_{N} + 1|\psi_n\rangle$

$= \frac{1}{4\alpha^2}\langle\psi_n|2N + 1|\psi_n\rangle = \underline{\frac{1}{4\alpha^2}(2n+1)}$

$\rightarrow \langle\psi_n|p^2|\psi_n\rangle = \hbar^2\alpha^2\langle\psi_n|a^+ a + a a^+|\psi_n\rangle \overset{\text{siehe}}{\underset{\text{oben}}{=}} \underline{\hbar^2\alpha^2(2n+1)}$

$\underline{k=3}$: ~~Ich habe leider keine Idee, wie ich hier Paritätseigenschaften nutzen kann.~~

Bitte ignorieren

$x^3 = \frac{1}{8\alpha^3}[a^+ a^+ a^+ + a^+ a^+ a + a^+ a a^+ + a^+ a a + a a^+ a^+ + a a^+ a + a a a^+ + aaa]$

$p^3 = -i\hbar^3\alpha^3[a^+ a^+ a^+ - a^+ a^+ a - a^+ a a^+ + a^+ a a - a a^+ a^+ + a a^+ a + a a a^+ - aaa]$

Immerhin fallen ein paar Terme (unterstrichen, siehe oben) weg.

→ Aufräumen, benutze: $[N, a^+] = a^+ a a^+ - a^+ a^+ a = a^+[a, a^+] = a^+$

$[N, a] = a^+ a a - a a^+ a = [a^+, a]a = -a$

Aus den Erkenntnissen von Aufgabe 12d) folgt, dass die Erwartungswerte null werden, da x, p ungerade Operatoren sind.

Bitte nicht ignorieren

$\rightarrow \langle\psi_n|x^3|\psi_n\rangle = \langle\psi_n|p^3|\psi_n\rangle = \underline{0}$

siehe letzte Seite

~~→ Übertrage $k=2$ auf die Funktion in der Aufgabenstellung, benutze Hilfsformel:~~

~~$\langle\varphi|x^2|\varphi\rangle = \sum_i \omega_i\langle i|x^2|i\rangle + 2\,\mathrm{Re}[\alpha_1^* \alpha_2\langle 1|x^2|2\rangle]$ analog für p~~

~~Einsetzen: $= \frac{1}{5}\langle\psi_2|x^2|\psi_2\rangle + \frac{4}{5}\langle\psi_1|x^2|\psi_1\rangle + 2\,\mathrm{Re}[\frac{4}{25}\langle\psi_1|x^2|\psi_2\rangle]$~~

~~$= \frac{1}{5}[\frac{1}{4\alpha^2}(2\cdot2+1)] + \frac{4}{5}[\frac{1}{4\alpha^2}(2\cdot1+1)] + 2\,\mathrm{Re}\frac{4}{25}\langle\psi_1|2N+1|\psi_2\rangle$~~

Übungsserie QM
-Serie 11-
07.07.11

$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$

$$\langle\varphi|x^2|\varphi\rangle = \frac{1}{4\alpha^2} + \frac{12}{5}\cdot\frac{1}{4\alpha^2} + \frac{8}{25}\,\mathrm{Re}\,\langle\psi_1|(2E_n+1)|\psi_2\rangle$$

$$= \frac{17}{5}\,\frac{1}{4\alpha^2} \overset{\alpha^2=\frac{1}{2}}{=} \underline{\frac{17}{10}}$$

$$\langle\varphi|p^2|\varphi\rangle = \frac{1}{5}\langle\psi_2|p^2|\psi_2\rangle + \frac{4}{5}\langle\psi_1|p^2|\psi_1\rangle + 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{4}{25}\langle\psi_1|p^2|\psi_2\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{5}\hbar^2\alpha^2(2\cdot 2+1) + \frac{4}{5}\hbar^2\alpha^2(2\cdot 1+1) + 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{4}{25}\underbrace{\langle\psi_1|2N+1|\psi_2\rangle}_{=0}\right]$$

$$= \hbar^2\alpha^2 + \frac{12}{5}\hbar^2\alpha^2 = \underline{\frac{17}{5}\hbar^2\alpha^2}$$

siehe letzte Seite

d) $\to$ Da $\langle x\rangle = 0 = \langle p\rangle \Rightarrow (\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle$, $(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle$

$$\to (\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \frac{17}{5}\,\frac{1}{4\alpha^2}\cdot\frac{17}{5}\hbar^2\alpha^2 = \left(\frac{17}{10}\hbar\right)^2 \to \underline{\underline{\Delta x\Delta p = \left(\frac{17}{10}\hbar\right)}}$$

Aufgabe 28

a) $\mathbf{p}^2$ in kart. Koord.: $p^2 = -\hbar^2(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) \to H = -\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2+z^2)$

Sep.-Ansatz: $H = X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)$ $\quad H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$

X, Y, Z kommutieren $\to$ gemeinsam diagonalisierbar $\to$ 3 ungekoppelte Harm. Osz.

$\to H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle \Rightarrow XYZ|\psi_n\rangle = (E_x+E_y+E_z)|\psi_n\rangle$

$\to$ bezeichne E_n mit $E_{x,y,z}$

bekannt: für $i = x,y,z$ gilt: $E_i = \hbar\omega(i+\frac{1}{2}) \to \underline{E_{x,y,z} = \hbar\omega(x+y+z+3/2)}$

$\to$ Ruheenergie: $E_0 = E_{0,0,0} = \underline{\hbar\omega\, 3/2}$

b) $x^2+y^2+z^2 =: r^2$, Masse $m \to \mu$

wie wir aus der Vorlesung (9.8) wissen, können wir schreiben: ($\vec{L}^2$ kommutiert mit V)

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\vec{L}^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

daraus folgt (vgl. Script): $H|Elm\rangle = E|Elm\rangle$, $L^2|Elm\rangle = \hbar^2 l(l+1)|Elm\rangle$

$$\to \psi_{Elm}(x) = \langle x|Elm\rangle = f_{El}(r)\,Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

mit $f_{El} = \frac{u_{El}}{r}$, folgt: $\underline{\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2} + V(r) - E\right]u_{El}(r) = 0}$ (siehe 9.11)

$V(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2$ $\quad\to \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 - E\right)u_{El}(r) = 0$

- Betrachte große r (zweiter Term verschwindet):

$$\frac{d^2}{dr^2}u_{El} - \underbrace{\frac{\mu^2\omega^2}{\hbar^2}}_{=:\alpha^2} r^2 u_{El} = 0 \to \underline{u_{El} \approx e^{-\frac{\alpha r^2}{2}}}$$

- Betrachte kleine r (Potential verschwindet), verwende Ansatz: $u_{El} \sim (\alpha r)^s$

$$\frac{d^2}{dr^2}u_{El} - \frac{l(l+1)}{r^2}u_{El} = 0$$

$$\to s(s-1)(\alpha r)^{s-2} - l(l+1)(\alpha r)^{s-2} = 0 \to \underline{s = l+1} \to \underline{u_{El} \sim (\alpha r)^{l+1}}$$

$s = -l$

$\hookrightarrow$ singulär am Ursprung

Ansatz für u_{El}: $u_{El} = \underbrace{(\alpha r)^{l+1}}_{\text{kleine } r} \sum_{k=0} a_k (\alpha r)^k e^{-(\alpha r)^2/2}$ $\qquad y := \alpha r$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{k+l+1} e^{-y^2/2} =: u_{El}(y)$$

• Berechne $\frac{d^2}{dy^2} u_{El} = \frac{d}{dy} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+l+1) y^{k+l} e^{-y^2/2} + y^{k+l+1}(-y) e^{-y^2/2}\right] a_k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Big[(k+l)(k+l+1) y^{k+l-1} e^{-y^2/2} + (k+l+1) y^{k+l} e^{-y^2/2} (-y)$$
$$+ (-y)(k+l+1) y^{k+l} e^{-y^2/2} + y^{k+l+1} e^{-y^2/2} y^2$$
$$- y^{k+l+1} e^{-y^2/2}\Big]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{-y^2/2} y^{k+l-1} \Big[(k+l)(k+l+1) + 2(-1) y^2 (k+l+1) - y^2 + y^4\Big]$$

Zielgleichung: $-\frac{\hbar^2}{2\mu} \partial_r^2 u_{El} + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{l(l+1)}{r^2} u_{El} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2 u_{El} - E u_{El} = 0 \quad \Big| \cdot \frac{2\mu}{\hbar^2}$

$(u_{El} = u_{El}(y),\ u''_{El} = \partial_y^2 u_{El})$

$$-u''_{El} + \frac{l(l+1)}{y^2} u_{El} + \overbrace{\alpha^2 r^2}^{y^2} u_{El} - 2 \frac{\mu}{\hbar^2} E \frac{1}{\alpha} = 0$$

→ Einsetzen... $e^{-y^2/2}$ entfällt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Big[- y^{k+l-1} (k+l)(k+l+1) + y^{k+l+1} (2k+2l+3) - \underline{y^{k+l+3}}$$
$$+ y^{k+l-1} l(l+1) + \underline{y^{k+l+3}} - 2 \frac{\mu}{\hbar^2} y^{k+l+1} E \frac{1}{\alpha}\Big] = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Big\{ y^{k+l-1} \big[l(l+1) - (k+l)(k+l+1)\big]$$
$$+ y^{k+l+1} \Big[(2k+2l+3) - 2 \frac{\mu}{\hbar^2} \frac{1}{\alpha} E\Big] \Big\} = 0 \qquad \Big| \ \frac{\mu}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\hbar\omega}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Big\{ y^{k+l-1} \big[l(l+1) - k(k+l+1) - l(k) - l(l+1)\big]$$
$$+ y^{k+l+1} \Big[(2k+2l+3) - 2 \frac{E}{\hbar\omega}\Big] \Big\} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Big\{ y^{k+l-1} \big[-k(k+l+1+l)\big] + y^{k+l+1} \Big[(2k+2l+3) - 2 \frac{E}{\hbar\omega}\Big] \Big\} = 0$$

→ Summe verschieben & a_0 und a_1 betrachten: $k=0$: linke Seite ist kein Problem, da $=0$
$k=1$: linke Seite verschwindet nicht → $a_1 = 0$

→ Summenverschiebung: (VZ-Wechsel) $\sum_{k=0} a_{k+2} \Big[(k+2)(2l+k+3) y^{l+k} + a_k \Big[\frac{2E}{\hbar\omega} - (2l+2k+3)\Big] y^{l+k}\Big] = 0$

$$\rightarrow \underline{\underline{a_{k+2} = a_k \frac{(2l+2k+3) - \frac{2E}{\hbar\omega}}{(k+2)(2l+k+3)}}}$$

Man sieht jedoch: $k \to \infty$ $a_{k+2} \sim \frac{2}{k} a_k$ → divergent → Abbruchbed. von nöten

→ $\frac{2E}{\hbar\omega} = 2l + 2n_r + 3$ → $\underline{E = (n_r + l + \frac{3}{2}) \hbar\omega}$, sieht bekannt aus.

Einsetzen → $a_{k+2} = a_k \frac{(2l+2k+3) - (2l+2n_r+3)}{(k+2)(2l+k+3)} = \frac{2(k-n_r)}{(k+2)(2l+k+3)}$

$$\Rightarrow u_{El}(y) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} a_k y^{k+l+1} e^{-y^2/2}, \quad \cancel{a_{k+1} = \frac{k-n_r}{}} \qquad \underline{\underline{a_{k+2} = \frac{(k-n_r)}{(k/2+1)(l+k/2+3/2)} a_k}}$$

Wende Substitution an, um das Ergebnis „schön" zu machen

$\Rightarrow \quad k \to 2k \quad \& \quad n_r \to 2n_r$

$$\Rightarrow \underline{a_{k+1} = a_k \left[k - n_r\right]\left[(k+1)(l+k+3/2)\right]^{-1}}$$

$$\underline{u_{El} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, y^{l+2k+1} \, e^{-y^2/2}} \qquad \underline{E = \hbar\omega(2n_r + l + 3/2)\hbar\omega}$$

c) Aus Teil a) folgt: $E = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z + 3/2)$
b) folgt: $E = \hbar\omega(2n_r + l + 3/2)$ $\Big\}$ $E = (N + 3/2)\hbar\omega$
↳ Hauptquantenzahl

→

N	E	n_r, l	n_x, n_y, n_z	Entartung
0	$\frac{3}{2}\hbar\omega$	0, 0	0,0,0	1
1	$\frac{5}{2}\hbar\omega$	0,1	1,0,0 / 0,1,0 / 0,0,1	3
2	$\frac{7}{2}\hbar\omega$	1,0 / 0,2	2,0,0 (3 Perm.) / 1,1,0 (3 Perm.	6
⋮				

Da im sphärischen Fall die Kugelflächenfunktionen $2l+1$ fach entartet sind, folgt erwartungsgemäß die gleiche Entartung wie im kartesischen Fall

→ Im Zustand E_n sind die Eigenfunktionen $\sum_{k=1}^{N+1} k = \underline{\underline{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)}}$

Aufgabe 27

c) Wende die Erkenntnisse des ersten Teils auf die Hilfsformel an.

Es wurde gezeigt, dass: $\langle \varphi_n | x | \varphi_n \rangle = 0 = \langle \varphi_n | x^3 | \varphi_n \rangle$
$\langle \varphi_n | p | \varphi_n \rangle = 0 = \langle \varphi_n | p^3 | \varphi_n \rangle$

$$\langle \varphi_n | x^2 | \varphi_n \rangle = \frac{1}{4\alpha^2}(2n+1) \qquad \langle \varphi_n | p^2 | \varphi_n \rangle = \hbar\alpha^2(2n+1)$$

$\underline{k=1}$: $\langle \varphi | x | \varphi \rangle = \sum_i w_i \underbrace{\langle i | x | i \rangle}_{=0} + 2\,\mathrm{Re}(\alpha_1^* \alpha_2 \langle 1 | x | 2 \rangle)$

$= 2\,\mathrm{Re}\left[\alpha_1^* \alpha_2 \langle 1 | \frac{1}{2\alpha}(\overset{0}{a^+} + a) | 2 \rangle\right]$

$= 2\,\mathrm{Re}\left[\sqrt{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}} \langle \psi_1 \exp(iE_1 t/\hbar) | \frac{1}{2\alpha} a | \psi_2 \exp(-iE_2 t/\hbar) \rangle\right]$

$= 2\,\mathrm{Re}\left[\sqrt{\frac{4}{25}} \langle \psi_1 | \frac{1}{2\alpha} \cdot \sqrt{2} | \exp(-i(-E_1 + E_2)t/\hbar) \psi_1 \rangle\right]$

~~$= \sqrt{2}\sqrt{\frac{4}{25}}\,\mathrm{Re}\left[\exp(-i\,\frac{7}{2}\omega t)\right] = \sqrt{2}\sqrt{\frac{4}{25}}\cos(\frac{7}{2}\omega t)$~~

$= \underline{\underline{\frac{4}{5}\cos(\omega t)}}$

$\langle \varphi | p | \varphi \rangle = \sum 0 + 2\,\mathrm{Re}(\alpha_1^* \alpha_2 \langle 1 | p | 2 \rangle)$

$= \frac{4}{5}\,\mathrm{Re}\left[\exp -i(E_2 - E_1)t/\hbar \langle \psi_1 | i\hbar\alpha(\overset{0}{a^+} - a) | \psi_2 \rangle\right]$

$= \frac{4}{5}\,\mathrm{Re}\left[\exp(-i\omega t) \langle \psi_1 | i\hbar\alpha(-\sqrt{2}) | \psi_1 \rangle\right]$

$= \underline{\underline{\frac{4}{5}\hbar\sin(\omega t)}}$

Nebenrechnung:

~~$\alpha_2^2 = \frac{1}{5}$~~
~~$\alpha_1^2 = \frac{4}{5}$~~
$\alpha = 1/\sqrt{2}$

$\langle x | 1 \rangle = \psi_1(x) \cdot e^{-iE_1 t/\hbar}$

$\langle x | 2 \rangle = \psi_2(x) \cdot e^{-iE_2 t/\hbar}$

$a | \varphi_n \rangle = \sqrt{n} | \varphi_{n-1} \rangle$

$a^+ | \varphi_n \rangle = \sqrt{n+1} | \varphi_{n+1} \rangle$

$E_1 = \hbar\omega(3/2)$
$E_2 = \hbar\omega(5/2)$

$\alpha_1 = e^{-E_1 t/\hbar} \cdot \sqrt{\frac{4}{5}}$

$\alpha_2 = e^{-E_2 t/\hbar} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$

k=2: $\langle\varphi|x^2|\varphi\rangle = \sum w_i \langle i|x^2|i\rangle + 2\,\mathrm{Re}[\alpha_1^*\alpha_2 \langle 1|x^2|2\rangle]$

$\langle\psi_n|x^2|\psi_n\rangle = \frac{1}{4\alpha^2}(2n+1)$ $\qquad = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4\alpha^2}(2\cdot1+1)+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4\alpha^2}(2\cdot2+1)$

$\langle\psi_n|p^2|\psi_n\rangle = \hbar^2\alpha^2(2n+1)$ $\qquad +2\,\mathrm{Re}[\exp(-i\omega t)\langle\psi_1|\frac{1}{4\alpha^2}(a^\dagger a^\dagger + aa)|\psi_2\rangle$

$\langle\psi_n|a^\dagger a^\dagger|\psi_{n\pm1}\rangle = 0$ $\qquad = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 5 = \underline{\underline{17/10}}$

$\langle\psi_n|aa|\psi_{n\pm1}\rangle = 0$

$(2n+1)\langle\psi_n|\psi_m\rangle = \delta_n^m(2n+1)$ $\qquad \langle\varphi|p^2|\varphi\rangle = \sum w_i\langle i|p^2|i\rangle + 2\,\mathrm{Re}[\alpha_1^*\alpha_2\langle 1|p^2|2\rangle]$ siehe $|x|^2$

$$= \frac{4}{5}\hbar^2\alpha^2\cdot 3+\frac{1}{5}\hbar^2\alpha^2\cdot 5 = \underline{\underline{\frac{17}{10}\hbar^2}}$$

k=3: $\langle\varphi|x^3|\varphi\rangle = 0 + 2\,\mathrm{Re}[\alpha_1^*\alpha_2\langle\psi_1|x^2 x|\psi_2\rangle]$

$\langle\psi_n|x^2|\psi_m\rangle = \text{const.}\cdot\delta_n^m$ $\qquad = 2\,\mathrm{Re}[\frac{\cancel{4}\,2}{5}\exp(-i\omega t)\langle\psi_1|x^2\frac{1}{2\alpha}(a^\dagger + a)|\psi_2\rangle]$

$$= \frac{2}{5}\,\mathrm{Re}[\exp(-i\omega t)\langle\psi_1|x^2\frac{\sqrt{2}}{\alpha}|\psi_1\rangle]$$

$$= \frac{4}{5}\,\mathrm{Re}[\exp(-i\omega t)\underbrace{\langle\psi_1|x^2|\psi_1\rangle}_{12/10}]$$

$$= \frac{48}{50}\cos(\omega t) = \underline{\underline{\frac{24}{25}\cos\omega t}}$$

$\langle\varphi|p^3|\varphi\rangle = 0 + 2\,\mathrm{Re}[\alpha_1^*\alpha_2\langle\psi_1|p^2 p|\psi_2\rangle]$

$\langle\psi_n|p^2|\psi_m\rangle \sim \delta_n^m$ $\qquad = \frac{4}{5}\,\mathrm{Re}[\exp(-i\omega t)\langle\psi_1|p^2(i\hbar\alpha(a^\dagger - a))|\psi_2\rangle$

$\langle\psi_1|p^2|\psi_1\rangle = \frac{12}{10}\hbar^2$ $\qquad = \frac{4}{5}\,\mathrm{Re}[\exp(-i\omega t)\langle\psi_1|p^2|i\hbar\,\cancel{\sqrt{2}\alpha}\,(-1)|\psi_1\rangle]$

$$= \frac{4}{5}\,\mathrm{Re}[\exp(-i\omega t)\hbar^3\cdot\frac{12}{10}\cdot i\cdot(-1)] = \underline{\underline{\frac{24}{25}\sin\omega t}}$$

d) $(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = 17/10 - \frac{16}{25}\cos^2(\omega t) = \frac{53}{50}+\frac{16}{25}\sin^2\omega t$

$\frac{53}{50}+\frac{16}{25} = \frac{17}{10}$ $\qquad (\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \hbar^2(\frac{17}{10}-\frac{16}{25}\sin^2\omega t) = \hbar^2[\frac{53}{50}+\frac{16}{25}\cos^2\omega t]$

$$\to (\Delta x)^2(\Delta p)^2 = \hbar^2\left[\left(\frac{53}{50}\right)^2 + \left[\frac{16}{25}\cos(\omega t)\sin(\omega t)\right]^2 + \left(\frac{53}{50}\cdot\frac{16}{25}\right)\right]$$

~~-> Wird an den Minima von cos(ωt)·sin(ωt) minimal. Das Mi~~

-> Wird an der Nullstelle von cos(ωt)·sin(ωt) Minimal -> $(\Delta x)(\Delta p)_{MIN} = \underline{\underline{\hbar\left[\frac{53}{50}\left(\frac{53}{50}+\frac{16}{25}\right)\right]^{1/2}}}$

-> $\underline{\underline{t_{MIN} = \frac{1}{\omega}\frac{\pi}{2}\cdot n,\ n\in\mathbb{N}}}$