Aufgabe 5

Zu zeigen: Die Abbildungen $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ bilden eine Gruppe:

- neutrales Element: gegeben durch die Identitätsabbildung
- Assoziativität: $\varphi_1(\varphi_2\varphi_3) = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3 = (\varphi_1\varphi_2)\varphi_3$
- Abgeschlossenheit: Verknüpfung bijektiver Funktionen ist wieder bijektiv, außerdem sind Quelle und Ziel ebenfalls identisch.
- Existenz des Inversen: Bijektive Funktionen besitzen immer ein Inverses.

Aufgabe 6

	e	a	b	ab	aba	abab
e	e	a	b	ab	aba	abab
a	a	e	ab	b	abab	aba
b	b	abab	e	aba	ab	a
ab	ab	aba	a	abab	b	e
aba	aba	ab	abab	a	e	b
abab	abab	b	aba	e	a	ab

Wie man sieht ist diese Gruppe isomorph zu D_3.

Aufgabe 7

- das neutrale Element ist enthalten, da $e \in H$ und $geg^{-1} = e$.
- $h_1, h_2 \in H: \quad gh_1g^{-1}gh_2g^{-1} = gh_1h_2g^{-1}$ dies zeigt außerdem, dass es sich um einen Homomorphismus handelt.
- Das Inverse existiert: $\left(ghg^{-1}\right)^{-1} = gh_1^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$

Es ist außerdem Bijektiv, da aus $ghg^{-1} = gh'g^{-1}$ folgt, dass $h = h'$, somit folgt durch Bijektivität und Homomorphismus, das es sich um einen Isomorphismus handelt

Aufgabe 8

1. odd: $e = 123, \quad a = 312, \quad b = 231$
   even: $132, \quad 213, \quad 321$
2. $a^{-1} = b, \quad b^{-1} = a, \quad ab = ba = e \quad \Rightarrow$ abelsch
3. $|A_n| = \frac{1}{2}n!$
4. zu zeigen: $gNg^{-1} = N$. Dies ist gegeben, da die Summe an Transpositionen für alle $g \in S_n$ gerade bleibt.
5. odd permutations.

Aufgabe 6

It follows from $ba^n b^{-1} = a^{-n}$ and the cyclic property of a:

$$ba = a^4 b, \quad ba^2 = a^3 b, \quad ba^3 = a^2 b, \quad ba^4 = ab \tag{1}$$

Also: $(ba^n)^{-1} = ba^n$. From that we get:

	e	a	aa	aaa	aaaa	b	ba	baa	baaa	baaaa
e	e	a	aa	aaa	aaaa	b	ba	baa	baaa	baaaa
a	a	aa	aaa	aaaa	e	baaaa	b	ba	baa	baaa
aa	aa	aaa	aaaa	e	a	baaa	baaaa	b	ba	baa
aaa	aaa	aaaa	e	a	aa	baa	baaa	baaaa	b	ba
aaaa	aaaa	e	a	aa	aaa	ba	baa	baaa	baaaa	b
b	b	ba	baa	baaa	baaaa	e	a	aa	aaa	aaaa
ba	ba	baa	baaa	baaaa	b	aaaa	e	a	aa	aaa
baa	baa	baaa	baaaa	b	ba	aaa	aaaa	e	a	aa
baaa	baaa	baaaa	b	ba	baa	aa	aaa	aaaa	e	a
baaaa	baaaa	b	ba	baa	baaa	a	aa	aaa	aaaa	e

This is isomorphic to Dih_5. So they represent the symmetrie operations on a regular polygon with 5 sides.