

Übungsaufgaben zur

Festkörperphysik I, WS 2010/2011**1 Die Struktur des Kristalls****1.6 Das Diamantgitter**

Das Bravais–Gitter von Diamant ist kubisch flächenzentriert. Die Basis besteht aus zwei Kohlenstoffatomen bei den Atompositionen $(0, 0, 0)$ und $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

1. Geben Sie einen Satz primitiver Translationsvektoren an.
2. Wieviele Atome befinden sich in der konventionellen kubischen Einheitszelle ?
3. Wie groß ist die Koordinationszahl ?

1.7 hcp–, bcc– und fcc–Strukturen

1. In einer einfach kubischen Kristallstruktur sitzen lediglich an den Ecken eines Würfels Atome. Die Berührungspunkte der Atome liegen deshalb entlang der Würfelkanten und die Gitterkonstante a beträgt $2r$, wobei r der Radius der Atome (Ionen) ist.
 - (a) Berechnen Sie den Volumenanteil p , den die Atome in der Elementarzelle der einfach kubischen Kristallstruktur einnehmen.
 - (b) Wie ändert sich der Volumenanteil beim Übergang von einem einfach kubischen zu einem kubisch raumzentrierten Gitter? Welche der beiden Kristallstrukturen nutzt den Raum besser aus?
 - (c) Die gemessenen Werte für die Dichte und Gitterkonstante von Eisen betragen $\rho_{\text{Fe}} = 7.86 \text{ g/cm}^3$ und $a_{\text{Fe}} = 2.87 \times 10^{-10} \text{ m}$. Können Sie aus diesen Messwerten darauf schließen, ob die Kristallstruktur einfach kubisch oder kubisch raumzentriert ist ($m_{\text{Fe}} = 9.28 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$)?
2. α -Co hat eine hcp–Struktur mit den Gitterkonstanten $a = 2.51 \text{ \AA}$ und $c = 4.07 \text{ \AA}$. β -Co hat dagegen eine fcc–Struktur mit der kubischen Gitterkonstante von 3.55 \AA . Wie groß ist der Dichteunterschied der beiden Formen?
3. Natrium zeigt eine Phasenumwandlung von einer bcc– zu einer hcp–Struktur bei $T = 23 \text{ K}$. Berechnen Sie die hcp–Gitterkonstante unter der Annahme, dass bei der Phasenumwandlung die Dichte gleich bleibt, das c/a Verhältnis der hcp–Struktur ideal ist und die kubische Gitterkonstante $a' = 4.23 \text{ \AA}$ beträgt.

2 Beugungsmethoden und reziprokes Gitter

2.1 Reziprokes Gitter eines hexagonalen Raumgitters

Betrachten Sie ein Raumgitter mit hexagonaler Symmetrie (Achsen und Winkel der gebräuchlichen Einheitszelle mit $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \neq |\mathbf{c}|$, $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 120^\circ$). Wählen Sie geeignete primitive Gittervektoren mit diesen Eigenschaften (aber $\gamma = 60^\circ$) und benutzen Sie diese, um die primitiven Gittervektoren des reziproken Gitters zu definieren. Es ist geschickt, $\mathbf{a}||\hat{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{c}||\hat{\mathbf{z}}$ zu wählen. Welche Symmetrie besitzt das reziproke Gitter? Welche Volumina haben die primitive Zellen des Raumgitters und des reziproken Gitters?

2.2 Volumen der Brillouin-Zone

Seien $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ und \mathbf{a}_3 die primitiven Vektoren des Bravais-Gitters und $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ und \mathbf{b}_3 diejenigen des reziproken Gitters. Zeigen Sie, dass

$$1. \quad \mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) = \frac{(2\pi)^3}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}$$

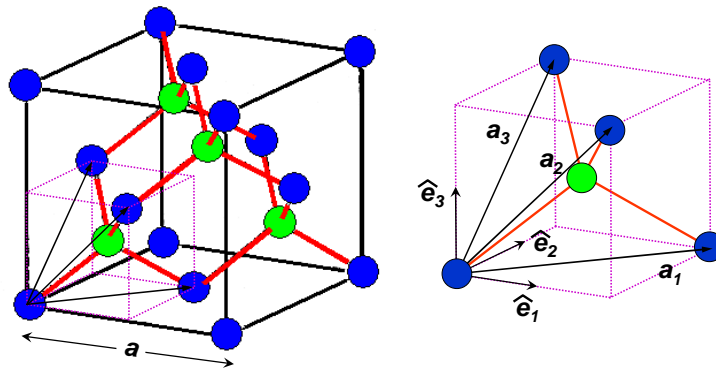
2. das Volumen der ersten Brillouin-Zone gleich $(2\pi)^3/V_c$ ist, wobei V_c das Volumen der primitiven Zelle des Kristalls ist.

Lösungen der Übungsaufgaben zur

Festkörperphysik I, WS 2010/2011

1 Die Struktur des Kristalls

1.6 Das Diamantgitter



In der obenstehenden Abbildung ist die konventionelle Zelle des Diamantgitters (links) und vergrößert ein Achtel der konventionellen Zelle gezeigt (rechts: hier sitzt ein Kohlenstoffatom im Zentrum eines Würfels und die restlichen vier Atome auf vier Ecken des Würfels, so dass diese vier Atome einen Tetraeder bilden, in dessen Zentrum das fünfte Atom sitzt). Die Basis des Diamantgitters besteht aus zwei Kohlenstoffatomen mit den Positionen $(0, 0, 0)$ und $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ in der konventionellen Zelle. Das Diamantgitter kann als zwei gegeneinander verschobene fcc-Gitter aufgefasst werden, auf deren Gitterplätzen jeweils die äquivalenten Kohlenstoffatome der Basis sitzen.

1. Wir müssen uns überlegen, mit welchen Gittervektoren wir das unverschobene und das verschobene fcc-Gitter beschreiben können. Wir sehen aus der Abbildung, dass wir das unverschobene Gitter durch

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(n_1, n_2, n_3) &= n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3 \\ &= \frac{a}{2} \{n_1(\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2) + n_2(\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_3) + n_3(\hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3)\} \end{aligned}$$

beschreiben können. Hierbei sind $\hat{\mathbf{e}}_i$ die Einheitsvektoren in Richtung der Achsen der konventionellen Zelle und n_i sind ganze Zahlen. Es gilt ferner $||\mathbf{a}_i|| = a/\sqrt{2}$.

Für das verschobene Gitter gilt

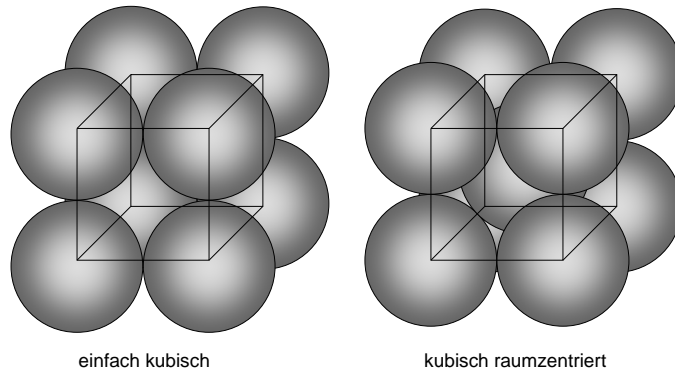
$$\begin{aligned}\mathbf{R}'(n'_1, n'_2, n'_3) &= \frac{a}{4}(\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3) \\ &\quad + \frac{a}{2} \{n'_1(\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2) + n'_2(\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_3) + n'_3(\hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3)\} \\ &= \frac{a}{4} \{ \hat{\mathbf{e}}_1[1 + 2n'_1 + 2n'_2] + \hat{\mathbf{e}}_2[1 + 2n'_3 + 2n'_1] + \hat{\mathbf{e}}_3[1 + 2n'_3 + 2n'_2] \}\end{aligned}$$

2. In der in der Abbildung gezeigten konventionellen Zelle befinden sich 4 Atome (grün) im Innern der Zelle. Weitere 8 Atome sitzen auf den Würfecken. Diese werden allerdings mit 8 Nachbarzellen geteilt. Schließlich verbleiben 6 Atome auf den Seitenflächen des Würfels, die mit 2 benachbarten Zellen geteilt werden. Somit erhalten wir die Zahl der Kohlenstoffatome in der konventionellen Zelle zu

$$N = 4 + \frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 8.$$

3. Die *Koordinationszahl* ist definiert als die Zahl der nächsten Nachbar-Atome. Im vorliegenden Fall hat jedes Kohlenstoffatom 4 nächste Nachbarn, die einen Tetraeder bilden, in dessen Zentrum ein weitere Kohlenstoffatom sitzt. Die Koordinationszahl ist also 4. Diese Koordination resultiert aus den stark gerichteten kovalenten Bindungen in der Diamantstruktur, die auf die sp^3 -Hybridisierung der Kohlenstofforbitale zurückzuführen ist.

1.7 hcp-, bcc- und fcc-Strukturen



1. kubische Gitter:

- (a) Das Volumen der kubischen Einheitszelle beträgt a^3 , das Volumen der Atome (8 Atome auf den Würfecken, die zu jeweils einem Achtel in der Einheitszelle liegen, siehe Abbildung) in der Elementarzelle beträgt $8 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$. Der Raumanteil p , den die Atome in der einfach kubischen Elementarzelle einnehmen ist somit

$$p = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{(2r)^3} = \frac{\pi}{6} \simeq 0.5235 \dots$$

- (b) Bei der kubisch raumzentrierten Struktur befinden sich *zwei* Atome in der Einheitszelle, die Atome berühren sich allerdings nicht entlang der Würfelkanten sondern entlang der Raumdiagonalen des Würfels (siehe Abbildung). Die Länge der Raumdiagonalen beträgt $D = \sqrt{3}a$, wobei a die Kantenlänge des Würfels ist. Andererseits ist $D = 4r$, woraus sich die Kantenlänge des Würfels zu $a = \frac{4}{\sqrt{3}}r$ ergibt. Der Raumanteil p ist gegeben dann

$$p = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}r\right)^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \simeq 0.6801 \dots$$

Der höhere Raumanteil der Atome/Ionen in der raumzentrierten Struktur entspricht dementsprechend einer besseren Nutzung des Raumes.

- (c) Aus der Masse der Fe-Atome $m_{\text{Fe}} = 9.28 \times 10^{-26} \text{ kg}$ ergibt sich beim einfach kubischen Gitter eine theoretische Dichte von $\rho_{\text{sc}} = m_{\text{Fe}}/a^3 \simeq 3.9255 \dots \text{ g/cm}^3$. Für das kubisch raumzentrierte Gitter ergibt sich dagegen eine theoretische Dichte von $\rho_{\text{bcc}} = 2m_{\text{Fe}}/a^3 \simeq 7.8511 \dots \text{ g/cm}^3$, die der gemessenen sehr nahe kommt. Allein aus der Messung der Dichte und der Gitterkonstante können wir also darauf schließen, dass Eisen kein einfach kubisches, sondern ein kubisch raumzentriertes Gitter besitzt.

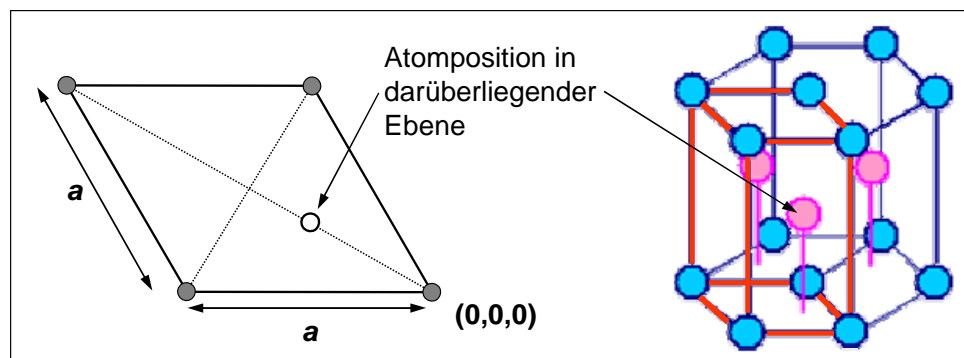
2. α - und β -Co:

Beide Kristallstrukturen (hcp und fcc) sind dicht gepackt, d. h. sie weisen ein im *Idealfall* ein Verhältnis $c/a = \sqrt{8/3} \approx 1.633 \dots$ auf. In der Realität gilt dagegen für α -Co $c/a = 1.62$, d.h. nahe beim idealen Wert von 1.633..., aber leicht darunter. In der fcc-Struktur ist der nächste Nachbar Abstand $a/\sqrt{2} = 3.55/\sqrt{2} = 2.51 \text{ \AA}$. Der Gitterabstand in der Ebene ist also identisch mit dem der hcp-Struktur. Falls im hcp-Fall $c/a = 1.63$ wäre, wären beide Strukturen dicht gepackt mit einem identischen nächste Nachbarabstand und folglich identischer Dichte. Mit $c/a = 4.07/2.51 = 1.62$ gilt allerdings

$$\frac{\rho_{\text{hcp}}}{\rho_{\text{fcc}}} = \frac{V_{\text{fcc}}}{V_{\text{hcp}}} = \frac{(c/a)_{\text{fcc}}}{(c/a)_{\text{hcp}}} = \frac{1.63}{1.62} \approx 1.006$$

d.h. die hcp-Struktur um etwa 0.6% dichter.

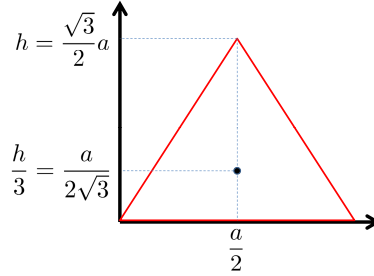
3. Phasenumwandlung von Natrium:



Wir können zur Lösung der Aufgabe die Volumina der primitiven mit denen der konventionellen Zellen vergleichen. Dabei müssen wir berücksichtigen, dass die primitive bcc-Zelle

ein und die primitive hcp-Zelle zwei Atome enthält, die konventionelle bcc-Zelle dagegen zwei und die konventionelle hcp-Zelle sechs Atome. Eine Skizze der hexagonal dicht gepackten Struktur ist in der Abbildung gezeigt. Drei Nachbaratome in der Basisebene bilden zusammen mit dem Atom in der nächsten Ebene ein Tetraeder mit der Seitenlänge a und der Höhe $c/2$ (vgl. Übungsblatt 1, Aufgabe 1.3). Links ist die Basisfläche der primitiven Zelle, rechts die konventionelle sowie die primitive Zelle (rot markiert) gezeigt.

$$V_{c,bcc}^{\text{konv}} = (a')^3 \quad V_{c,bcc}^{\text{prim}} = \frac{1}{2}(a')^3$$



Das Volumen der konventionellen hcp-Zelle erhalten wir als Produkt aus der Fläche des Basis-Sechsecks mit der Höhe h (vgl. obige Abbildung):

$$F_{\text{Sechseck}} = 6F_{\text{Dreieck}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$V_{c,hcp}^{\text{konv}} = F_{\text{Sechseck}}c = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2c$$

das Volumen der primitiven hcp-Zelle (vg. Abbildung) ist dann $V_{c,hcp}^{\text{konv}}/3$:

$$V_{c,hcp}^{\text{prim}} = \frac{V_{c,hcp}^{\text{konv}}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2c$$

Hierbei kann man auch ausnutzen, dass die Koordinaten des Atoms in der Ebene über der Basisebene $\{a/2, a/2\sqrt{3}, c/2\}$ sind (vgl. Abbildung). Da der Abstand zwischen allen Atomen a ist, erhalten wir die Beziehung

$$a = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{12} + \frac{c^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{c^2}{4}}$$

Daraus erhalten wir $c = \sqrt{8/3}a = 1.633a$.

Wir müssen jetzt immer Zellvolumina mit der gleichen Zahl von Atomen betrachten, da sich ja die Dichte beim Phasenübergang nicht geändert hat:

$$3 \cdot V_{c,bcc}^{\text{konv}} = V_{c,hcp}^{\text{konv}} \Rightarrow 3(a')^3 = 3\sqrt{2}a^3$$

$$2 \cdot V_{c,bcc}^{\text{prim}} = V_{c,hcp}^{\text{prim}} \Rightarrow 2 \cdot \frac{(a')^3}{2} = \sqrt{2}a^3$$

In beiden Fällen erhalten wir $a^3 = (a')^3/\sqrt{2}$ und somit mit $a' = 4.23 \text{ \AA}$ für die hcp-Gitterkonstante $a \simeq 3.77 \text{ \AA}$.

2 Beugungsmethoden und reziprokes Gitter

2.1 Reziprokes Gitter eines hexagonalen Raumgitters

Wir starten mit der expliziten Form für die Gittervektoren des hexagonalen Bravais-Gitters:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= a\hat{\mathbf{x}} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}_2 &= \frac{a}{2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\sqrt{3}}{2}a\hat{\mathbf{y}} = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}_3 &= c\hat{\mathbf{z}} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Das Spatprodukt dieser drei Vektoren berechnet sich zu

$$V_{c,\text{Bravais}} = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2c$$

Beachten Sie, dass sich dieses Spatprodukt auch als Determinante der Matrix

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} \end{pmatrix} = a^2c \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \det \mathbf{A} &= \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)\end{aligned}$$

auffassen lässt.

Nach der Definition (vgl. Vorlesung) erhält man die primitiven Gittervektoren des reziproken Gitters in der folgenden Form

$$\mathbf{b}_i = 2\pi\epsilon_{ijk} \frac{\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \quad ; \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

wobei ϵ_{ijk} der völlig antisymmetrische (Levy-Civita-) Tensor ist. Im Einzelnen erhält man

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1 &= \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2c} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{a}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2c} \frac{ac}{2} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2\pi}{a} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2c} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2c} ac \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2\pi}{a} \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{b}_3 &= \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2c} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ a & 0 & 0 \\ \frac{a}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}a & 0 \end{vmatrix} = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2c} \frac{a^2}{2} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{2\pi}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Man kann relativ schnell verifizieren, dass gilt (vgl. Vorlesung)

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\pi\delta_{ij}$$

mit δ_{ij} dem Kronecker- δ -Symbol. Das aus den Vektoren $\mathbf{b}_i, i = 1, 2, 3$ gebildete Spatprodukt lautet

$$V_{c,\text{reziprok}} = \mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) = \frac{(2\pi)^3}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2c} = \frac{(2\pi)^3}{V_{c,\text{Bravais}}} \equiv \det \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{1x} & b_{2x} & b_{3x} \\ b_{1y} & b_{2y} & b_{3y} \\ b_{1z} & b_{2z} & b_{3z} \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{a^2c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Man erkennt sofort, dass gilt

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} = a^2c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{2\pi}{a^2c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\pi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Volumen der Brillouin-Zone

1. Entscheidend ist hier die Lagrangesche Vektoridentität: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$. Jetzt setzt man die Definition für \mathbf{b}_1 ein. Von der Definition her kann man leicht die Orthogonalitätsrelation $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\pi\delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$) herleiten. Dann erhält man mit $V_c := \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)$:

$$\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) = 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)} \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) =$$

$$\frac{2\pi}{V_c} [(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2)(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_3) - (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_2)(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_3)] = \frac{2\pi}{V_c} [(2\pi)(2\pi) - (0)(0)] = \frac{(2\pi)^3}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}.$$

2. Aus der Vektorrechnung weiß man, dass das Spatprodukt ja gerade das Volumen des aufgespannten Spats ist. Also erhält man direkt aus 1 das Ergebnis. Man sieht auch, dass die Formel stimmt, wenn man das Ergebnis von Aufgabe 1 nachprüft. Wir zeigen noch zusätzlich, dass das Spatprodukt tatsächlich das Volumen ist. Das Volumen eines Parallelepipeds ist gegeben als $V = F \cdot h$. Wir haben

$$|\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)| = (|\mathbf{a}_1| \cdot \|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3\| \cdot \cos(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)) =$$

$$(|\mathbf{a}_1| \cdot \|\mathbf{a}_2\| \cdot \|\mathbf{a}_3\| \cdot \sin(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot \cos(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)) =$$

$$(|\mathbf{a}_2\| \cdot \|\mathbf{a}_3\| \cdot \sin(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \cdot \|\mathbf{a}_1\| \cdot \cos(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)) = F \cdot h = V_c,$$

wenn man sich den Parallelepiped auf der Grundfläche, die durch $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ gebildet wird, liegend denkt.