

Übungsaufgaben zur

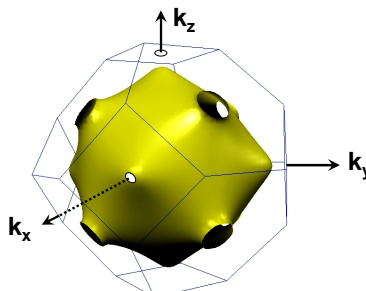
Physik der Kondensierten Materie II, SS 2011**9 Dynamik von Kristallelektronen****9.1 De Haas–van Alphen–Effekt**

Die Messung der magnetischen Suszeptibilität $\chi = \mu_0 M/B$ von reinen Metallen zeigt bei tiefen Temperaturen eine oszillierende Abhängigkeit vom angelegten Magnetfeld. Die Oszillationen sind periodisch in $1/B$. Dieser Effekt wird De Haas – van Alphen – Effekt genannt. Mit Hilfe der Beziehung

$$S_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{B_{n+1}} - \frac{1}{B_n} \right) = \frac{2\pi e}{\hbar}$$

erlaubt die Messung des De Haas – van Alphen – Effekts die Bestimmung der Extremalflächen $S_{\mathbf{k}}$ der Fermi–Fläche, welche im \mathbf{k} –Raum von Elektronenbahnen senkrecht zur Richtung des magnetischen Feldes umschlossen werden.

1. Betrachten Sie das Elektronengas von Gold als ein System freier Elektronen mit der Dichte $n = 5.9 \times 10^{22} \text{cm}^{-3}$ und schätzen Sie ab, welche Größe für die Extremalfläche der Fermi–Kugel zu erwarten ist.



2. Im Experiment beobachten wir für ein Feld parallel zur $[001]$ –Richtung eines Gold–Einkristalls Oszillationen mit einer Periode von $\Delta(1/B) = B_{n+1}^{-1} - B_n^{-1} = 1.95 \times 10^{-5} \text{T}^{-1}$. Ist das Magnetfeld dagegen parallel zur $[111]$ –Richtung, so werden zwei sich überlagernde Oszillationen mit den Perioden $2.05 \times 10^{-5} \text{T}^{-1}$ und $6 \times 10^{-4} \text{T}^{-1}$ beobachtet. Berechnen Sie jeweils die Größe der dazugehörigen Extremalfläche $S_{\mathbf{k}}$ und interpretieren Sie die Ergebnisse anhand der in der Abbildung dargestellten Fermi–Fläche von Gold.

9.2 Extremalbahnen im reziproken Raum

In einem homogenen Magnetfeld B bewegen sich Kristallelektronen im \mathbf{k} -Raum auf Bahnen, die auf Flächen konstanter Energie verlaufen und deren Bahnfläche senkrecht zum angelegten Magnetfeld ist. Für geschlossene Bahnen ist die Umlaufzeit durch

$$T(E, \mathbf{k}) = \frac{\hbar^2}{eB} \frac{\partial S_{\mathbf{k}}}{\partial E}$$

gegeben, wobei $S_{\mathbf{k}}$ die von der Elektronenbahn im \mathbf{k} -Raum umschlossene Fläche senkrecht zu \mathbf{B} ist.

1. Begründen Sie qualitativ, warum im Experiment (zum Beispiel beim De Haas – van Alphen – Effekt oder Zyklotronresonanz) immer nur extremale Bahnen von Elektronen, die sich auf Flächen konstanter Energie bewegen, beobachtet werden.
2. Welche Form besitzen die Extremalbahnen im \mathbf{k} -Raum, wenn für die Elektronen eine isotrope $E(\mathbf{k})$ Beziehung

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m^*}$$

angenommen wird. Berechnen Sie die resultierende Zyklotronfrequenz $\omega_c = eB/m_c$ und zeigen Sie, dass für den angenommenen Spezialfall die Zyklotronmasse m_c mit der effektiven Masse m^* übereinstimmt.

3. Betrachten Sie Flächen konstanter Energie, die Rotationsellipsoide

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2(k_x^2 + k_y^2)}{2m_t} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_l}$$

mit den transversalen und longitudinalen effektiven Massen m_t und m_l darstellen. Berechnen Sie die Zyklotronfrequenz ω_c für $\mathbf{B} \parallel \hat{\mathbf{z}}$ und leiten Sie daraus die Zyklotronmasse m_c ab. Was passiert, wenn wir das Magnetfeld senkrecht zur $\hat{\mathbf{z}}$ -Richtung anlegen?

10 Halbleiter

10.1 Elektrischer und Wärme– Transport in Metallen und Halbleitern

Vergleichen Sie Metalle und Halbleiter hinsichtlich ihrer elektrischen und thermischen Transporteigenschaften:

1. Skizzieren Sie die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands für ein Metall und für einen intrinsischen Halbleiter. Welches sind die charakteristischen Temperaturabhängigkeiten, die Größenordnungen der Absolutwerte und welches sind die physikalischen Ursachen für die unterschiedlichen Beiträge?
2. Diskutieren Sie dasselbe für die thermische Leitfähigkeit von Metallen und Halbleitern bzw. Isolatoren.

Lösungen der Übungsaufgaben zur

Physik der Kondensierten Materie II, SS 2011**9 Dynamik von Kristallelektronen****9.1 De Haas–van Alphen–Effekt**

1. Für ein freies Elektronengas ist die Fermi–Fläche eine Kugeloberfläche, deren Extremalfläche durch die maximale Querschnittsfläche $S_{\mathbf{k}} = \pi k_F^2$ gegeben ist, die für alle Richtungen gleich ist. Der Fermi–Wellenvektor ist im Modell freier Elektronen durch

$$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \quad (1)$$

gegeben. Setzen wir $n = 5.9 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ ein, so erhalten wir $k_F = 1.2 \times 10^8 \text{ cm}^{-1}$ und damit die Größe der Extremalfläche zu $S_{\mathbf{k}} = 4.56 \times 10^{16} \text{ cm}^{-2}$.

2. Die Größe einer Extremalfläche lässt sich über die Beziehung

$$S_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{B_{n+1}} - \frac{1}{B_n} \right) = \frac{2\pi e}{\hbar} \quad (2)$$

aus der gemessenen Magnetfeldperiode $\Delta(1/B) = B_{n+1}^{-1} - B_n^{-1}$ bestimmen. Mit dem Zahlenwert

$$\frac{\hbar}{e} = 6.58 \cdot 10^{-8} \text{ G cm}^2$$

erhält man für die [001]–Richtung mit der beobachteten Periode von $1.95 \times 10^{-5} \text{ T}^{-1}$ die Extremalfläche

$$S_{\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{6.58 \cdot 10^{-8}} \frac{10^4}{1.95 \cdot 10^{-5}} \text{ cm}^{-2} = 4.89 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-2}$$

Diese Fläche stimmt gut mit der im Rahmen der Näherung des freien Elektronengases bestimmten Flächen $S = 4.56 \times 10^{16} \text{ cm}^{-2}$ überein.

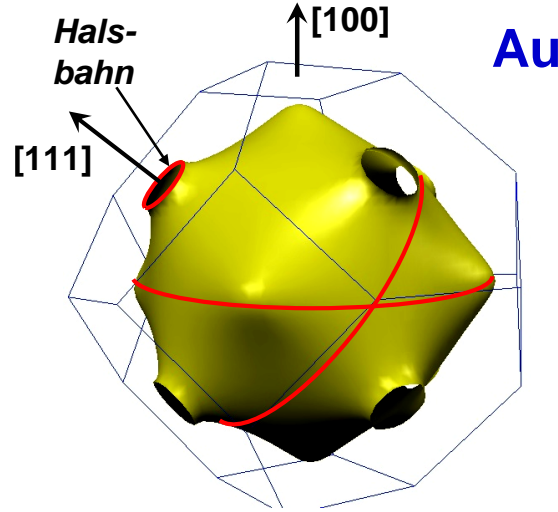
Für die [111]–Richtung erhalten wir für die Periode $2.05 \times 10^{-5} \text{ T}^{-1}$ die Extremalfläche

$$S_{\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{6.58 \cdot 10^{-8}} \frac{10^4}{2.05 \cdot 10^{-5}} \text{ cm}^{-2} = 4.66 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-2}$$

die wiederum der im Rahmen des freien Elektronengases bestimmten Fläche sehr nahe kommt. Die Ursache dafür ist, dass die beiden Extremalflächen den Querschnittsflächen einer nur leicht verformten Fermi-Kugel entsprechen (siehe Abbildung). Die zusätzliche Periode von $6 \times 10^{-4} \text{T}^{-1}$ entspricht einer wesentliche kleineren Extremalfläche von

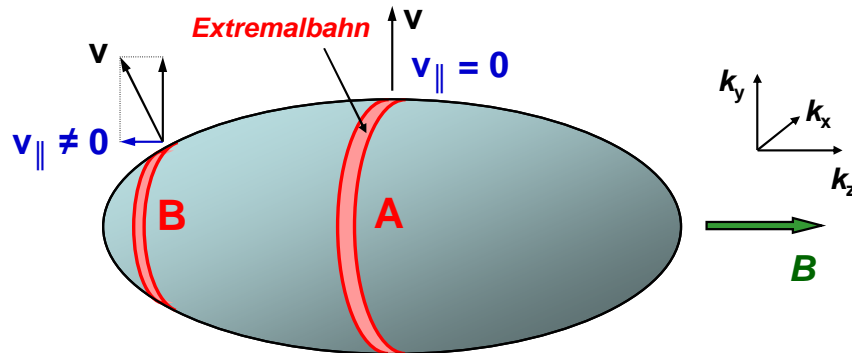
$$S_{\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{6.58 \cdot 10^{-8}} \frac{10^4}{6 \cdot 10^{-4}} \text{ cm}^{-2} = 0.16 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-2}$$

Diese Fläche entspricht den so genannten Halsbahnen, die durch die in $[111]$ -Richtung verlaufenden Ausläufer der Fermi-Fläche entstehen (siehe Abbildung).



9.2 Extremalbahnen im reziproken Raum

1. Um die Frage zu diskutieren, warum sich im Experiment nur Extremalbahnen von Elektronen beobachten lassen, betrachten wir die in der Abbildung gezeigte Fläche konstanter Energie.



Benachbarte Bahnen, die unterschiedliche Wellenzahlkomponenten k_{\parallel} parallel zum anliegenden Magnetfeld haben, besitzen mehr oder weniger stark voneinander abweichende Umlaufzeiten T . Das Besondere der Extremalbahnen ist die Tatsache, dass hier die Änderung der Umlaufzeit infolge einer Änderung von k_{\parallel} verschwindet. Die Beiträge von benachbarten Bahnen in der Umgebung der ExtremalBahn, die phasengleich durchlaufen werden, verstärken sich somit und führen zu einem experimentell beobachtbaren Messsignal. Im Fall der Zyklotronresonanz tragen zum Beispiel die Elektronen im Bereich des mit

A gekennzeichneten Bereichs zur Zyklotronresonanz bei. Die Bahnen im mit B gekennzeichneten Bereich besitzen alle stark voneinander abweichende Umlaufzeiten, so dass sich ihre Beiträge gegenseitig kompensieren. Die Elektronen aus diesem Bereich führen also zu keiner Resonanzerscheinung.

2. Für eine isotrope $E(\mathbf{k})$ -Beziehung

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m^*} \quad (3)$$

sind die Flächen konstanter Energie Kugeloberflächen, wobei der Radius der Kugel durch

$$k(E) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m^* E} \quad (4)$$

gegeben ist. Die einzige Extremalfläche ist die maximale Querschnittsfläche $S_{\mathbf{k}} = \pi k^2(E) = 2\pi m^* E / \hbar^2$. Aus der Umlaufzeit

$$T(E, k) = \frac{\hbar^2}{eB} \frac{\partial S_{\mathbf{k}}}{\partial E} = 2\pi \frac{m^*}{eB} \quad (5)$$

erhalten wir die Zyklotronfrequenz zu

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} = \frac{eB}{m^*} \quad (6)$$

Durch Vergleich diesen Ausdrucks mit der Definition $\omega_c = eB/m_c$ der Zyklotronfrequenz sehen wir sofort, dass in dem betrachteten Spezialfall $m_c = m^*$.

3. Die Beziehung

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2)}{2m_t} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_l}$$

lässt sich in

$$1 = \frac{k_x^2}{2m_t E / \hbar^2} + \frac{k_y^2}{2m_t E / \hbar^2} + \frac{k_z^2}{2m_l E / \hbar^2} \quad (7)$$

umformen. Dies ist die Bestimmungsgleichung eines Ellipsoids mit den Halbachsen

$$a = b = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_t E} \quad c = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_l E} . \quad (8)$$

Für $\mathbf{B} \parallel \hat{\mathbf{z}}$ umschließen die Extremalbahnen der Ladungsträger eine kreisförmige Fläche der Größe

$$S_{\mathbf{k}} = \pi a^2 = \frac{2\pi}{\hbar^2} m_t E$$

(siehe Abbildung). Mit (5) und (6) folgt daraus die Zyklotronfrequenz

$$\omega_c = \frac{eB}{m_t} . \quad (9)$$

Wir sehen, dass in diesem Fall die Zyklotronmasse mit der transversalen effektiven Masse m_t übereinstimmt.

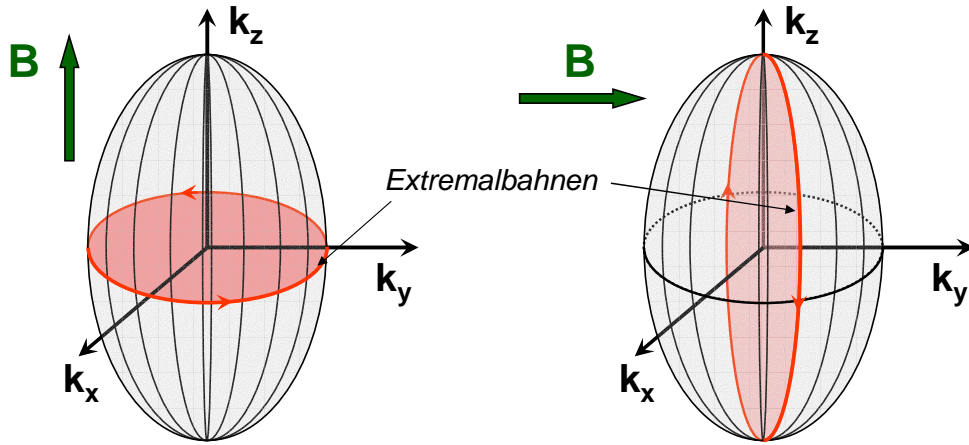
Für $\mathbf{B} \perp \hat{\mathbf{z}}$ umschließen die Extremalbahnen der Ladungsträger eine Ellipsenfläche der Größe

$$S_{\mathbf{k}} = \pi ac = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sqrt{m_t m_l} E$$

Die resultierende Zyklotronfrequenz ist

$$\omega_c = \frac{eB}{\sqrt{m_t m_l}}. \quad (10)$$

In diesem Fall hat also die Zyklotronmasse den Wert $m_c = \sqrt{m_t m_l}$. Die entsprechenden Extremalbahnen im reziproken Raum sind in der nachfolgenden Abbildung dargestellt.



10 Halbleiter

10.1 Elektrischer und Wärme- Transport in Metallen und Halbleitern

1. **Metall:** Bei sehr tiefen Temperaturen wird der spezifische Widerstand ρ in Metallen konstant, da die hier die temperaturunabhängige Streuung der Ladungsträger an Unreinheiten dominiert. Mit ansteigender Temperatur wird dann die Streuung an Phononen wichtig. Für $T < \Theta_D$ gilt $\rho = \text{const} + T^\alpha$ mit α im Bereich zwischen 2 und 5. Bei hohen Temperaturen gilt $\rho \propto T$, weil die Zahl der Phononen und damit die Elektron-Phonon-Streuung proportional zu T zunimmt. Typische Werte des spezifischen Widerstands von "guten" Metallen liegen bei Raumtemperatur im Bereich weniger $\mu\Omega\text{cm}$.

Halbleiter: Für die meisten Halbleiter ist die Energielücke E_g groß gegen $k_B T$. Für undotierte Halbleiter ist deshalb die Ladungsträgerdichte $n_i \propto e^{-E_g/2k_B T}$. Diese starke Temperaturabhängigkeit der Ladungsträgerdichte dominiert die Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstands $\rho = 1/\sigma = 1/n_i e \mu \propto e^{2E_g/k_B T}$. Die Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit μ kann meist vernachlässigt werden. Sie wird aber bei dotierten Halbleitern wichtig, wo die Ladungsträgerdichte in einem weiten Temperaturbereich konstant ist. Der spezifische Widerstand von intrinsischen Halbleitern liegt bei Raumtemperatur typischerweise oberhalb von $1\Omega\text{cm}$.

2. **Metall:** Das Wiedemann–Franz–Gesetz, $\kappa = L \cdot \sigma T$ (L = Lorenz–Zahl), sagt eine lineare Abhängigkeit der thermischen Leitfähigkeit bei tiefen Temperaturen voraus, da hier $\sigma = 1/\rho = \text{const.}$ Oberhalb von Θ_D ist $\sigma = 1/\rho \propto 1/T$ und damit κ konstant. Der Anteil der Phononen an der thermischen Leitfähigkeit kann bei Metallen üblicherweise wegen der starken Streuung der Phononen an den Elektronen vernachlässigt werden. Die maximale Wärmeleitfähigkeit von reinen Metallen liegt im Bereich 100 bis 1000 W/mK.

Halbleiter/Isolator: Die thermische Leitfähigkeit von Halbleitern oder Isolatoren wird aufgrund der geringen Ladungsträgerdichte durch die Phononen dominiert. Bei hohen Temperaturen ($T \gg \Theta_D$) ist $\kappa \propto 1/T$, weil die mittlere freie Weglänge der Phononen aufgrund der mit steigender Temperatur zunehmenden Phonon–Phonon–Streuung abnimmt. Bei sehr tiefen Temperaturen wird die mittlere freie Weglänge konstant (Streuung an Verunreinigungen oder an Probenoberfläche dominiert). Die Wärmeleitfähigkeit variiert in diesem Temperaturbereich proportional zu T^3 , da die Anzahl der Phononen proportional zu T^3 mit steigender Temperatur zunimmt. Hochreine Halbleiter und Isolatoren können Wärmeleitfähigkeiten bis zu mehr als 1000 W/mK besitzen, also ähnliche Werte wie die besten Metalle. Allerdings basiert bei Metallen die Wärmeleitfähigkeit auf dem Elektronensystem, bei Halbleitern und Isolatoren dagegen auf dem Phononensystem.