Einführung in die Festkörperphysik I

Prof. Peter Böni, E21

Lösung zum 14. Übungsblatt (Besprechung: 5. - 7. Februar 2007)

P. Niklowitz, E21

Aufgabe 14.1: Kristallelektronen im elektrischen Feld.

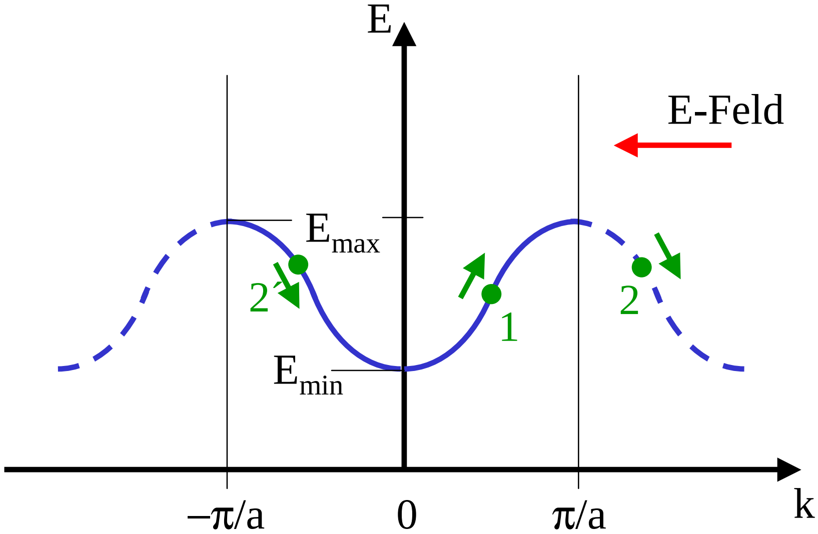
Ein Elektron befinde sich in einem leeren Leitungsband eines perfekten Kristalls bei tiefer Temperatur. Welche Bewegung würde ein solches Elektron unter der Wirkung eines konstanten elektrischen Feldes $\vec{E}$ ausführen, falls keine Streuzentren (wie z.B. Fremdatome, Phononen usw.) vorhanden wären? Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und beschreiben Sie die Elektronenbewegung quantitativ mit den Werten des elektrischen Feldes $E = 6\ V/cm$, der Gitterkonstante $a = 3\ Å$ und der Bandbreite $W = 6\ eV$.

Formal gilt für Kristallelektronen dieselbe Bewegungsgleichung wie für freie Elektronen:

$$\hbar\dot{\vec{k}} = -e\vec{E}\ .$$

Bei freien Elektronen gilt für die Geschwindigkeit $\vec{v} = \hbar\vec{k}/m$. Allerdings handelt es sich im Falle von Elektronen im periodischen Potential bei $\hbar\vec{k}$ um den Kristallimpuls und die Geschwindigkeit folgt aus der Dispersionsrelation:

$$\vec{v} = (1/\hbar)\vec{\nabla}_{\vec{k}}E(\vec{k})\ .$$



Im Bild wird eine typische kosinusförmige Dispersionsrelation gezeigt. Die Funktion $v(k)$ ist dann eine Sinusfunktion. Die Bewegungsgleichung zeigt, dass $\dot{\vec{k}}$ eine Konstante ist. Daher ist auch die Zeitabhängigkeit der Gruppengeschwindigkeit eine Sinusfunktion. An den Positionen

1 und 2 im Bild wird die Bewegungsrichtung des Elektrons im k-Raum gezeigt, wenn das elektrische Feld in negativer k-Richtung angelegt worden ist. Die gesamte Bewegung des Elektrons kann innerhalb der ersten Brillouinzone dargestellt werden:

$$\psi(k+K) = e^{i(k+K)r}u(r) = e^{ikr}e^{iKr}u(r) = e^{ikr}u'(r) \ ,$$

wobei mit $u(r)$ auch $u'(r) = e^{iKr}u(r)$ der Periodizität des Kristallgitters folgt. Position 2 kann also zur Position 2' in die erste Brillouinzone verlegt werden.
Die Sinusfunktion von v bedeutet, dass das Blochelektron mit der Zeit Schwingungen im Kristall vollführt. Die Periode T der Schwingung entspricht der Zeit, die das Elektron braucht, um einmal die Brillouinzone vollständig zu durchlaufen:

$$T = (2\pi/a)/\dot{k} = h/(aeE) = 0.23 \text{ ns}.$$

Die Amplitude der Schwingung erhält man daraus, dass sich das Elektron auf seinem Weg vom Zentrum zum rechten Rand ($+\pi/a$) der Brillouinzone von der Bandunterkante (E_{min}) zur -oberkante (E_{max}) bewegt. Aufgrund der Energieerhaltung gilt für die Amplitude:

$$eEA = E_{max} - E_{min} = W \ .$$

Die Amplitude ist daher

$$A = 1 \text{ cm}.$$

Sehr saubere Metalle haben mittlere freie Weglängen zwischen Störstellen im sub-Mikrometerbereich. Diese sogenannten Blochschwingungen können also nicht beobachtet werden.

Aufgabe 14.2: Fermikugel im elektrischen Feld.

Wir betrachten ein Metall mit freien Elektronen in halbklassischer Näherung: die Elektronen füllen die Eigenzustände gemäß der Fermi-Statistik, die Antwort der Elektronen auf ein von außen angelegtes Feld sei aber klassisch. Die Streuung an Störstellen verhindert, dass die Elektronen unbegrenzt beschleunigt werden und im stationären Zustand werde die Elektronenbewegung durch die mittlere Driftgeschwindigkeit v_D beschrieben.
(a) Zeigen Sie, dass bei niedriger Temperatur gilt:

$$n_e/dn \approx (2/3)(v_F/v_D)$$

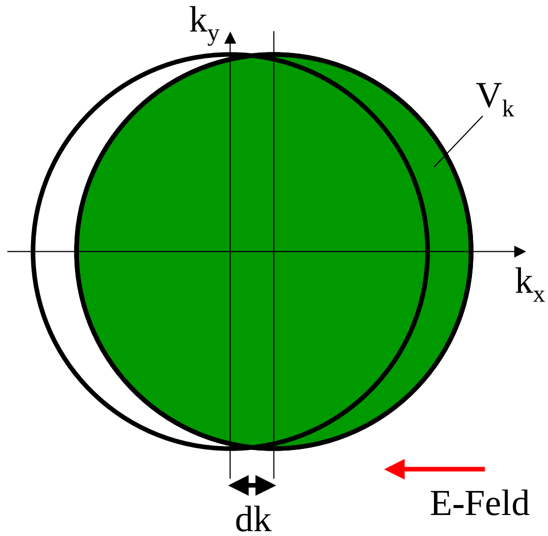
mit der Elektronendichte n_e, der am Stromtransport beteiligten Elektronenkonzentration dn und der Fermi-Geschwindigkeit v_F.

Der Effekt eines äußeren elektrischen Feldes auf die Fermikugel ist im folgenden Bild dargestellt. Die Elektronen werden nach der Bewegungsgleichung aus Aufgabe 1 in positiver k_x Richtung verschoben, dann aber durch Streuung an Störstellen wieder zur ursprünglichen Fermi-Verteilung zurückgeworfen. Im Mittel stellt sich eine Verschiebung der Fermi-Kugel um dk ein. Für freie Elektronen gilt dann $v = \hbar k/m$ und im speziellen Fall

$$v_D = \hbar dk/m \ .$$

Wenn V_k das Volumen der Fermikugel ist und die Temperatur klein im Verhältnis zur Fermi-Temperatur ist, gilt

$$n_e/dn \approx V_k/(2dV_k) \ .$$



Hierbei wurde angenommen, dass die Zustandsdichte im reziproken Raum konstant ist. dV_k ist das im Bild gekennzeichnete Volumen, was durch Anlegen des elektrischen Feldes zusätzlich besetzt mit Elektronen besetzt wird. Die entsprechenden Zustände auf der anderen Seite der Fermi-Kugel werden geleert. Das Volumen der Fermi-Kugel ist

$$V_k = (4/3)\pi k_F^3 \ .$$

Das Volumen dV_k kann ermittelt werden, wenn man sich die Fermikugeln durch die xy-Ebene in zwei Halbkugeln unterteilt denkt. Wird die rechte Halbkugel um dk verschoben, bleibt das Volumen erhalten. Für kleine dk entspricht das Volumen dV_k dem Volumen des freiwerdenden Zylinders mit Dicke dk und Radius k_F. Daraus folgt:

$$V_k/(2dV_k) \approx (2/3)k_F/dk \ .$$

Für die freien Elektronen gilt $v_F = \hbar k_F/m$. Aus der Newtonschen Bewegungsgleichung folgt $\hbar dk = -eE\tau$ mit der mittleren Streuzeit τ. Weiterhin ist $v_D = \dot{p}\tau/m = eE\tau/m$. Die Beziehung zwischen der Driftgeschwindigkeit und der Verschiebung der Fermikugel ist dann $dk = v_D m/\hbar$ und wir erhalten die gesuchte Beziehung

$$n_e/dn = (2/3)v_F/v_D \ .$$

(b) Was ist das Verhältnis n_e/dn für eine typische Silberprobe in einem elektrischen Feld von $E = 0.1\ \ V/m$ ($n_e = 5.86 * 10^{28}\ \ m^{-3}$, mittlere Streuzeit $\tau = 2 * 10^{-13}\ \ s$)?

Die Fermi-Geschwindigkeit kann durch die gesamte Elektronendichte ausgedrückt werden. Die Gesamtzahl der Elektronen ist allgemein $N = 2V_k/\rho_k$ (Faktor 2 berücksichtigt die verschiedenen Spinorientierungen) mit der Zustandsdichte im reziproken Raum ρ_k. Mit $\rho_k = 8\pi^3/V$ und $V_k = (4/3)\pi k_F^3$ erhält man $N = k_F^3 V/(3\pi^2)$ und die Teilchendichte

$$n_e = k_F^3/(3\pi^2) \ ,$$

woraus auch die Fermi-Geschwindigkeit folgt. Mit dem obigen Ausdruck für die Driftgeschwindigkeit in Abhängigkeit der mittleren Streuzeit und Einsetzen der Zahlenwerte erhält man

$$n_e/dn = 2.6 * 10^8 \ .$$

Nur ein kleiner Teil der Elektronen trägt zum effektiven Stromtransport bei.

Aufgabe 14.3: Kristallelektronen im Magnetfeld.

Gegeben sei die Energiedispersion

$$E(\vec{k}) = (\hbar^2/2)((k_x^2 + k_y^2)/m_t^* + k_z^2/m_l^*) \ ,$$

bei der m_t^* *die transversale und* m_l^* *die longitudinale effektive Masse ist. Eine Fläche, auf der* $E(\vec{k})$ *konstant ist, hat die Form eines Rotationsellipsoids. Zeigen Sie, dass in halbklassischer Näherung die Umlauffrequenz eines Elektrons im Magnetfeld durch*

$$\omega_c = eB/\sqrt{m_t^* m_l^*}$$

gegeben ist, wenn das statische Magnetfeld $\vec{B}$ *in* x*-Richtung zeigt (*ω_c *ist die Zyklotronfrequenz).*

Die klassische Bewegungsgleichung für ein Kristallelektron im magnetischen Feld lautet

$$\hbar\dot{\vec{k}} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

mit dem Magnetfeld $\vec{B} = (B, 0, 0)$. Aus der Bewegungsgleichung folgt

$$\dot{k}_x = 0 \ ,$$

$\hbar\dot{k}_y = -ev_z B = -e\hbar k_z B/m_l^*$ und damit

$$\dot{k}_y = -\omega_l k_z$$

mit $\omega_l = eB/m_l^*$ und analog

$$\dot{k}_z = \omega_t k_y$$

mit $\omega_t = eB/m_t^*$. Ableitung der k-Komponenten nach der Zeit liefert

$$\ddot{k}_y = -\omega_l \dot{k}_z = -\omega_l \omega_t k_y$$

und die selbe Gleichung für k_z. Hierbei handelt es sich um Schwingungsgleichungen mit der Lösung

$$\omega_c = \sqrt{\omega_l \omega_t} = eB/\sqrt{m_l^* m_t^*} \ .$$