

Übungsaufgaben zur

Physik der Kondensierten Materie II, SS 2011**10 Halbleiter****10.2 Hall–Effekt und elektrische Leitfähigkeit in Halbleitern**

Durch die Messung der elektrischen Leitfähigkeit und des Hall–Effekts als Funktion der Temperatur lassen sich zahlreiche charakteristische Parameter von Halbleitern bestimmen.

Da der Ladungstransport in Halbleitern sowohl durch die Elektronen im Leitungsband als auch die Löcher im Valenzband erfolgt, muss für den Hall–Koeffizienten der Zweiband–Ausdruck

$$R_H = \frac{\sigma_h \mu_h - \sigma_e \mu_e}{(\sigma_e + \sigma_h)^2} .$$

verwendet werden, wobei $\tau_{e,h}$ und $m_{e,h}^*$ die Streuzeiten und effektiven Massen der beiden Ladungsträgersorten (Elektronen und Löcher) und $\sigma_{e,h} = ne^2 \tau_{e,h} / m_{e,h}^*$ die mit den beiden Ladungsträgertypen verbundenen elektrischen Leitfähigkeiten sind.

1. Leiten Sie den Ausdruck für R_H her und drücken Sie den Hall–Koeffizienten als Funktion der Beweglichkeiten und der Ladungsträgerdichten aus.
2. Leiten Sie Ausdrücke für den Hall–Koeffizienten eines Halbleiters bei reiner Eigenleitung und bei reiner Störstellenleitung (für n - und p -Halbleiter) ab und diskutieren Sie das Vorzeichen des Hall–Koeffizienten.
3. Wie lassen sich durch Messung der Temperaturabhängigkeit des Hall–Koeffizienten die Energielücke E_g eines Halbleiters sowie bei einem n -Typ Halbleiter der Abstand E_d des Donatorniveaus von der Leitungsbandkante bzw. bei einem p -Typ Halbleiter der Abstand E_a des Akzeptorniveaus von der Valenzbandkante bestimmen?
4. Lässt sich durch Messung des Hall–Effekts die Dichte n_D der Donatoren in einem n -Typ Halbleiter bzw. die Dichte n_A der Akzeptoren in einem p -Typ Halbleiter bestimmen? Wenn ja, in welchem Temperaturbereich muss die Messung stattfinden?
5. Wie kann man durch Messung der Hall–Konstanten und der elektrischen Leitfähigkeit die Beweglichkeiten μ_e und μ_h im Fall reiner Störstellenleitung und im Fall reiner Eigenleitung bestimmen?

Hinweis: Nehmen Sie an, dass Sie die effektiven Massen m_e^* bzw. m_h^* durch Messung der Zyklotronresonanz bestimmt haben.

11 Dielektrische Eigenschaften

11.1 Polarisierbarkeit von atomarem Wasserstoff

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom in einem äußeren elektrischen Feld, das senkrecht zur Bahnebene steht (semiklassische Betrachtungsweise). Zeigen Sie, dass in diesem Fall für die elektronische Polarisierbarkeit des Wasserstoffatoms $\alpha_{el} = 4\pi a_0^3$ gilt, wobei a_0 der Radius der ungestörten Bahn ist. Nehmen Sie an, dass das angelegte Feld in x -Richtung zeigt und die Bahnebene in der yz -Ebene liegt. Die Auslenkung x soll außerdem klein gegenüber a_0 sein.

Anmerkung: Die x -Komponente des Kernfeldes an der ausgelenkten Position der Elektronenbahn muss gleich dem angelegten Feld sein.

Lösungen der Übungsaufgaben zur

Physik der Kondensierten Materie II, SS 2011**10 Halbleiter****10.2 Hall–Effekt und elektrische Leitfähigkeit in Halbleitern**

1. Um den Zweiband–Modell–Ausdruck für den Hall–Koeffizienten abzuleiten, müssen wir nur beachten, dass sich die Ströme von Elektronen und Löchern addieren. Eine solche Rechnung wurde bereits durchgeführt, und zwar im WS 2010/11, Übungsblatt 13 (27.01.2011), Aufgabe 7.8. Hier wurde der allgemeine Fall zweier Ladungsträgersorten 1 und 2 betrachtet, mit folgendem Resultat für den Hall–Koeffizienten

$$\begin{aligned} R_H &= \frac{\sigma_1 \mu_1 + \sigma_2 \mu_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} \\ \sigma_i &= n_i q_i \mu_i \\ \mu_i &= \frac{q_i \tau_i}{m_i} \end{aligned} \quad (1)$$

In unserem Fall korrespondieren die Ladungsträgersorten 1 und 2 zu den Löchern ($q_1 = e$, $n_1 = p_v$, $m_1 = m_h^*$) und zu den Elektronen ($q_2 = -e$, $n_2 = n_c$, $m_2 = m_e^*$). daher kann man (1) umschreiben in der Form

$$R_H = \frac{p_v \mu_h^2 - n_c \mu_e^2}{e(p_v \mu_h + n_c \mu_e)^2} \quad (2)$$

2. Bei reiner Eigenleitung ist $n_c = p_v = n_i$ und für die Hall–Konstante ergibt sich

$$R_{H,i} = \frac{1}{n_i e} \frac{\mu_h - \mu_e}{\mu_h + \mu_e} . \quad (3)$$

Wir sehen, dass die Hall–Konstante positiv oder negativ sein kann, je nachdem ob $\mu_h > \mu_e$ oder $\mu_h < \mu_e$.

Bei reiner Störstellenleitung können wir jeweils eine Ladungsträgersorte vernachlässigen und es ergibt sich aus (2)

$$R_{H,e} = -\frac{1}{n_c e} \quad \text{oder} \quad R_{H,h} = +\frac{1}{p_v e} , \quad (4)$$

je nachdem ob reine n -Leitung (p_v vernachlässigbar) oder reine p -Leitung (n_c vernachlässigbar) vorliegt. Dieser Ausdruck entspricht dem bekannten Ergebnis für den Hall-Koeffizienten, das wir bei Vorliegen nur einer Ladungsträgersorte (Einband-Modell) erhalten.

3. Wir wollen nun noch diskutieren, wie wir durch Messung von R_H als Funktion der Temperatur die Größen E_g , E_d und E_a bestimmen können:

- Zur Erinnerung sei hier angemerkt, dass bei intrinsischen Halbleitern die Dichte der Elektronen im Leitungsband $n_c(T)$ und der Löcher im Valenzband $p_v(T)$ gegeben sind durch (vgl. Vorlesung)

$$\begin{aligned} n_c(T) &= \frac{2}{\lambda_{Te}^3} e^{-\frac{E_c - \mu}{k_B T}} \\ p_v(T) &= \frac{2}{\lambda_{Th}^3} e^{-\frac{E_v - \mu}{k_B T}} \\ \lambda_{Te,h} &= \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\pi m_{e,h}^* k_B T}} \end{aligned}$$

Hier bedeutet $\lambda_{Te,h}$ die (thermische) deBroglie-Wellenlänge der thermisch angeregten Elektronen im Leitungsband bzw. Löcher im Valenzband. Bildet man das Produkt aus n_c und p_v so lässt sich das chemische Potential eliminieren:

$$n_c(T) \cdot p_v(T) = \frac{2}{\lambda_{Te}^3} \frac{2}{\lambda_{Th}^3} e^{-\frac{E_g}{k_B T}} ; \quad E_g = E_c - E_v$$

Für intrinsische Halbleiter gilt $n_v = p_v = n_i$ und man kann schreiben

$$\begin{aligned} n_i(T) &= \frac{2}{\lambda_{Ti}^3} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} \\ \lambda_{Ti} &= \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\pi \sqrt{m_h^* m_e^*} k_B T}} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Energielücke E_g messen wir $R_{H,i}(T)$ (vgl. Gl. (3)) als Funktion der Temperatur im Bereich hoher Temperaturen, wo die Dichte der Ladungsträger durch die thermisch aus dem Valenzband ins Leitungsband angeregten Ladungsträger dominiert wird. Für diese Temperaturabhängigkeit der intrinsischen Ladungsträgerdichte gilt somit

$$n_i(T) = \left(\frac{2\pi \sqrt{m_e^* m_h^*} k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} \propto T^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} . \quad (5)$$

Der Term $(\mu_h - \mu_e)/(\mu_h + \mu_e)$ in (3) zeigt keine Temperaturabhängigkeit, da sich diese durch die Quotientenbildung heraushebt. Wir erhalten dann

$$R_{H,i}(T) \propto \frac{e^{\frac{E_g}{2k_B T}}}{T^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$\ln(|R_{H,i}(T)| T^{\frac{3}{2}}) = \text{const} + \frac{E_g}{2k_B T}$$

Tragen wir daher $\ln(|R_{H,i}(T)|T^{\frac{3}{2}})$ gegen $1/T$ auf, so erhalten wir eine Gerade mit der Steigung $E_g/2k_B$.

- Zur Bestimmung der Ionisierungsenergie E_d in einem n -Halbleiter mit Hilfe des Hall-Effekts müssen wir den Hall-Effekt bei tiefen Temperaturen messen. In diesem Bereich können wir die thermisch aus dem Valenzband ins Leitungsband angeregten Ladungsträger vernachlässigen. Die Ladungsträgerdichte wird hier durch das Ausfrieren der Ladungsträger, die aus den Donatorniveaus ins Leitungsband angeregt sind, dominiert. Wir dürfen für $n_c(T)$ dann den Ausdruck (vgl. Vorlesung)

$$n_c(T) = \frac{2n_D}{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{n_D}{n_c^{\text{eff}}} e^{\frac{E_d}{k_B T}}}}$$

$$\stackrel{T \rightarrow 0}{\simeq} \sqrt{n_D n_c^{\text{eff}}} e^{-\frac{E_d}{2k_B T}} \propto T^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{E_d}{2k_B T}} ; \quad n_c^{\text{eff}} = \frac{2}{\lambda_{Te}^3}$$

verwenden und erhalten

$$\ln(|R_{H,e}(T)|T^{\frac{3}{4}}) = \text{const} + \frac{E_d}{2k_B T}$$

Tragen wir wiederum $\ln(|R_{H,e}(T)|T^{\frac{3}{4}})$ gegen $1/T$ auf, so erhalten wir eine Gerade mit der Steigung $E_d/2k_B$. Eine analoge Betrachtung gilt für die Bestimmung der Ionisierungsenergie E_a in einem p -Halbleiter.

4. In einem n -Halbleiter, der keine Akzeptoren enthält, ist in einem weiten mittleren Temperaturbereich die Ladungsträgerdichte

$$n_c(T) = \frac{2n_D}{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{n_D}{n_c^{\text{eff}}} e^{\frac{E_d}{k_B T}}}} \stackrel{T \text{ hoch}}{\simeq} n_D = \text{const}$$

In diesem Temperaturbereich sind alle Donatoren ionisiert und die intrinsische Ladungsträgerdichte kann noch vernachlässigt werden. Nach (4) gilt für diesen Bereich dann

$$n_D = -\frac{1}{R_{H,e}e}$$

Für einen reinen p -Halbleiter ohne Donatoren gilt entsprechend

$$n_A = +\frac{1}{R_{H,h}e}$$

5. Die Beweglichkeiten μ_e und μ_h hängen über die Streuzeiten τ_e und τ_h von der Temperatur ab. Für den Temperaturbereich, in dem reine Störstellenleitung vorliegt, erhält man die Beweglichkeiten durch eine kombinierte Messung von $R_{H,e}$ bzw. $R_{H,h}$ und σ . Aus (4) folgt

$$\mu_e = R_{H,e}\sigma \quad \text{und} \quad \mu_h = R_{H,h}\sigma . \quad (6)$$

Bei genügend hohen Temperaturen, wo reine Eigenleitung ($n_c = p_v = n_i$) vorliegt, gilt ferner

$$\sigma = e(n_c\mu_e + p_v\mu_h) = en_i(\mu_e + \mu_h) , \quad (7)$$

woraus sich mit Hilfe von (3) die Beziehung

$$R_{H,i}\sigma = \mu_h - \mu_e \quad (8)$$

ergibt. Um aus den beiden Gleichungen (7) und (8) die Beweglichkeiten μ_e und μ_h zu berechnen, benötigen wir außer den gemessenen Größen $R_{H,i}$ und σ noch die Elektronendichte $n_i(T)$ bei Eigenleitung. Diese können wir nach Gleichung (5)

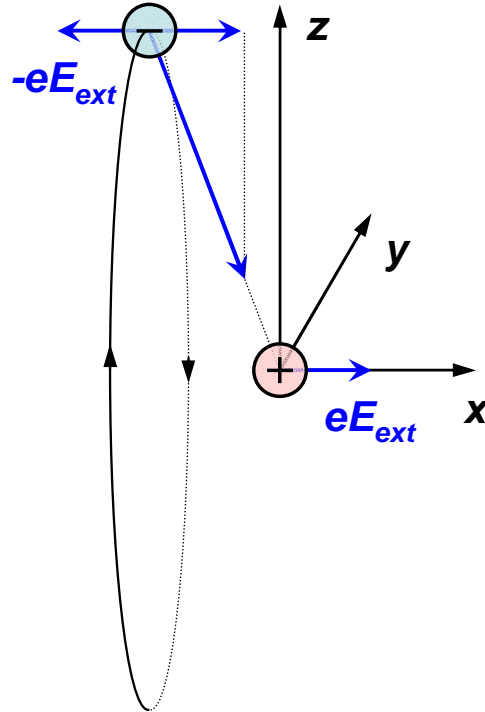
$$n_i(T) = \sqrt{n_c(T)p_v(T)} = \left(\frac{2\pi\sqrt{m_e^*m_h^*}k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} \quad (9)$$

berechnen, wenn wir neben der Energielücke E_g noch die effektiven Massen m_e^* und m_h^* kennen. Letztere können z.B. mit Hilfe der Zyklotron-Resonanz bestimmt werden.

Insgesamt sehen wir, dass wir durch Messung der elektrischen Leitfähigkeit und des Hall-Effekts sowie durch die Bestimmung der effektiven Massen mit Hilfe der Zyklotron-Resonanz alle relevanten Halbleiterparameter wie E_g , E_a , E_d , n_D , n_A , μ_e oder μ_h bestimmen können.

11 Dielektrische Eigenschaften

11.1 Polarisierbarkeit von atomarem Wasserstoff



Eine Ladung erfährt im elektrischen Feld \mathbf{E}^{ext} die Kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{E}^{\text{ext}}$. Zwei Ladungen üben aufeinander die Kraft

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (10)$$

aus. Wir nehmen nun an, dass sich das Proton mit Ladung $q_1 = e$ (siehe Abbildung) im Ursprung befindet. Durch das in x -Richtung angelegte elektrische Feld E_x^{ext} entsteht auf das Proton in x -Richtung die Kraft $+eE_x^{\text{ext}}$ und auf das Elektron die Kraft $-eE_x^{\text{ext}}$. Dadurch werden der negative und der positive Ladungsschwerpunkt des Atoms in x -Richtung gegeneinander verschoben. Um die Gleichgewichtsverschiebung x zu bestimmen, müssen wir die Kraft aufgrund des angelegten Feldes der rücktreibenden Kraft aufgrund der Anziehung der beiden Ladungen gleichsetzen. Für die x -Komponente erhalten wir, wenn wir annehmen dass sich das Proton im Ursprung befindet

$$eE_x^{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \frac{x}{r} . \quad (11)$$

Damit erhalten wir das elektrische Dipolmoment

$$p_x^{\text{el}} = ex = E_x^{\text{ext}} 4\pi\epsilon_0 r^3 \quad (12)$$

und für das elektrische Feld

$$E_x^{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ex}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_x^{\text{el}}}{r^3} . \quad (13)$$

Das elektrische Dipolmoment weist in positiver x -Richtung (wir können uns entweder die Ladung $-e$ in negativer x -Richtung oder die Ladung $+e$ in positiver x -Richtung verschoben denken).

Da $x \ll a_0$ sein soll, können wir benutzen, dass

$$r^3 = [x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}} \approx [y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}} = [a_0^2]^{\frac{3}{2}} = a_0^3$$

gilt und wir erhalten

$$p_x^{\text{el}} = ex = E_x^{\text{ext}} 4\pi\epsilon_0 a_0^3 . \quad (14)$$

Das Dipolmoment ist definiert als

$$\mathbf{p}^{\text{el}} = \epsilon_0 \alpha_{\text{el}} \mathbf{E}$$

wobei α_{el} die elektronische Polarisierbarkeit ist. Vergleichen wir diese Definition mit (14), so erhalten wir

$$\alpha_{\text{el}} = \frac{p_x^{\text{el}}}{\epsilon_0 E_x^{\text{ext}}} = 4\pi a_0^3 . \quad (15)$$

Wichtig ist, dass die Polarisierbarkeit α_{el} eines Atoms über das lokale, am Ort des Atoms wirkende elektrische Feld E^{lok} definiert wird. In dieser Aufgabe ist das lokale Feld natürlich gleich dem äußeren Feld, da wir nur ein einzelnes Atom betrachtet haben und die Wirkung der Dipolfelder benachbarter Atome dann nicht berücksichtigen müssen.

Hinweis: Für die Umrechnung in CGS-Einheiten benutzt man $\alpha_{\text{SI}} = 4\pi\alpha_{\text{CGS}}$, woraus sich $\alpha_{\text{CGS}} = a_0^3$ ergibt.