Aufgabe 15

Starte mit zeitfreier eindimensionaler Schrödingergleichung:

$$\left[\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\right]\psi(x) = E\psi(x), \quad p^2 = -\hbar^2\partial_x^2$$

Man erhält die beiden symmetrisch liegenden Schnittpunkte für $V(x_{\mathrm{r,l}}) = E$ liegenden Schnittpunkte bei:

$$x_{\mathrm{r,l}} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

Man erhält in WKB-Näherung die Bedingung:

$$\frac{1}{\hbar}\int_{x_l}^{x_r}\sqrt{2m\,(E - V(x))}\,\mathrm{d}x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

Lösung des Integrals:

$$\int_{x_l}^{x_r}\sqrt{2m\,(E - V(x))}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi E}{\omega} \quad \text{(Mathematica)}$$

Daraus folgt das bekannte Ergebnis:

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Aufgabe 16

Unterteile in zwei Bereiche: „linker Bereich“: $x < a$, „rechter Bereich“: $x > a$. Für ersteren ergibt sich der Hamiltonoperator mit trivialer Lösung:

$$\hat{\mathrm{H}}\psi_l(x) = E\psi_l(x), \quad \hat{\mathrm{H}}_l = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V_1, \quad V_1 < E$$
$$\psi_l(x) = C_1\exp\left[-\frac{\mathbf{i}p_l x}{\hbar}\right] + C_2\exp\left[\frac{\mathbf{i}p_l x}{\hbar}\right], \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

Verwende WKB-Näherung für rechten Bereich:

$$p(x) = \sqrt{2m\,(E - V(x))}$$
$$\psi_{r'}(x) = \frac{D_1}{\sqrt{p(x)}}\exp\left[-\frac{\mathbf{i}}{\hbar}\int_x^b p_r(x')\,\mathrm{d}x'\right] + \frac{D_2}{\sqrt{p(x)}}\exp\left[\frac{\mathbf{i}}{\hbar}\int_x^b p_r(x')\,\mathrm{d}x'\right], \quad D_1, D_2 \in \mathbb{C}$$

Und nutze anschließend die Übertragungsvorschrift:

$$\psi_r(x) = \frac{D_1}{\sqrt{|p(x)|}}\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\int_x^b |p_r(x')|\,\mathrm{d}x' - \frac{\mathbf{i}\pi}{4}\right] + \frac{D_2}{\sqrt{|p(x)|}}\exp\left[\frac{1}{\hbar}\int_x^b |p_r(x')|\,\mathrm{d}x' - \frac{\mathbf{i}\pi}{4}\right]$$

Der Transmissionskoeffizient T ergibt sich zu:

$$T = \frac{j_{\text{transmittiert}}}{j_{\text{einfallend}}} = \quad \ldots \quad \text{Stetigkeitsbedingungen} \quad \ldots \quad \text{Voodoo} \quad \ldots \quad \text{w.z.b.w}$$