Aufgabe 94

Ein unitärer Vektorraum ist ein Paar (V, σ), das aus einem $\mathbb{C}$ Vektorraum V und einer positiv definiten hermiteschen Sesqulinearform σ auf V besteht. (Vorlesung)

Zeige zuerst, dass es sich um einen Vektorraum handelt, definiere dazu Addition und skalare Multiplikation $(a, b \in \mathbb{C}, \quad u, v \in l^2)$

$$\begin{aligned} av &= (av_1, av_2, \dots) \\ v + w &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots) \end{aligned}$$

Zeige nun noch, dass $x = av + w$ noch in l^2 liegt, dazu muss $\sum_i^\infty |x_k|^2 < \infty$ gelten.

$$\begin{aligned} & \sum_i |av_i + w_i|^2 \\ \text{Dreieckungsleichung:} \quad & \leq \sum_i \left(|av_i|^2 + |w_i|^2\right) \\ & = |a|^2 \sum_i |v_i|^2 + \sum_i |w_i|^2 < \infty \quad \Rightarrow x \in l^2 \end{aligned}$$

Sesquilinearität (folgt durch einsetzen und Linearität von $\mathbb{C}$ und komplex konjugiertem des zweiten Arguments) und Hermitizität (da konj. komplexes vom zweiten Argument) des Skalarproduktes sind offensichtlich nach Definition gegeben, ebenso die positive Definitheit (da $|x|^2 > 0, \forall x \neq 0$).

Aufgabe 95

Es sei $n \leq m$ die Anzahl der nicht linear abhängigen Vektoren. Dann indiziere gegebene Vektoren so, dass $a_1, \dots, a_n$ den Untervektorraum $\operatorname{span}(a_1, \dots, a_m)$ aufspannen und $a_{n+1}, \dots, a_m$ linear von dieser Basis abhängig sind. Entsprechend der Vorlesung lässt sich auch eine Basis $b_1, \dots, b_n$ dieses Untervektorraums wählen, welche aus den Einträgen $\pm 1, 0$ auf der Diagonalen besteht (Satz von Sylvester). Wegen der Sesquilinearität wird das Skalarprodukt nur null, wenn einer der beiden Vektoren null wird, was jedoch mit der gewählten Basis ausgeschlossen ist (denn der Nullvektor ist linear abhängig). Demzufolge besteht die Diagonale nur aus den Einträgen ± 1.

Daraus folgt für die Gestalt von A:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

Wollen nun zeigen, dass die Einträge von C, D, E linear abhängig von B sind, was die Behauptung zeigt *(keine korrekte Formulierung, aber ich hoffe es ist verständlich, was gemeint ist – C lässt sich aus B darstellen, und D und E aus dem linear abhängigen C, sowie B).*

Nach Voraussetzung lässt sich jedes $a_i,\ n < i \leq m$ als Linearkombination der gewählten Basis darstellen: $a_i = \sum_j \lambda_j^i b_j$.

Zeige lineare Abhängigkeit oBdA. für ein Matrixelement in $E,\ n < i, j \leq m$:

$$(a_i, a_j) = \left(\sum_k \lambda_k^i b_k, \sum_l \lambda_l^j b_l \right) = \sum_k \lambda_k^i \lambda_k^j \underbrace{(b_k, b_k)}_{b_{kk}}$$

Da die Summation bis n erfolgt, ist der Rang von A offensichtlich gleich dem Rang von B und dieser ist wegen Diagonalgestalt mit einträgen ± 1 gleich dem Rang von $n = \operatorname{span}(a_1, \dots, a_n) = \operatorname{span}(a_1, \dots, a_m)$

Aufgabe 96

Es seien $(u_1^1, \dots, u_l^1)$ und $(u_1^2, \dots, u_k^2)$ linear unabhängige Vektoren, welche die Vektorräume U_1, U_2 aufspannen, diese seien oBdA. orthonormal. Dieser werden durch orthonormale Vektoren $(u_{k+1}^1, \dots, u_n^1)$ und $(u_{l+1}^2, \dots, u_n^2)$ zu einer Basis von V_1 und V_2 fortgesetzt.

Es sei oBdA. $l \leq k$.
Betrachte nun Abbildung f entwickelt nach gegebenen Orthonormalbasen $\rightarrow$ Matrix $A \in \mathbb{C}^{k \times l}$, erweitere Matrix nun derart, dass $A' \in \mathbb{C}^{k \times k}$ unitär ist. Die zugeordnete unitäre Abbildung sei f'. Dabei geschieht die Erweiterung folgendermaßen:
Man nehme sich einen Vektor v_x der Länge k, für den gilt: $v_x \bar{v_x}^\intercal = 1$, sowie $v_x \bar{v_i}^\intercal = 0,\ 1 \leq i \leq l$. Dabei sind die v_i die Zeilenvektoren der Matrix A mit Länge k.
Beispiel für $A \in \mathbb{C}^{3 \times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \bar{A}^\intercal = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \bar{A}^\intercal A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Erweitere A um: $v_x = (1, 0, 0)\intercal$, dieser ist offensichtlich senkrecht zu den anderen Vektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \mathbf{i}, 1)^\intercal, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \mathbf{i})^\intercal$, außerdem ist A' ebenfalls unitär wie auch symmetrisch:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \bar{A'}^\intercal = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A'\bar{A'}^\intercal = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definiere nun folgende Abbildung $g : V_1 \rightarrow V_2$:

$$g(u_1^1, \dots, u_n^1) = f'(u_1^1, \dots, u_k^1) + g'(u_{k+1}^1, \dots, u_n^1)$$

Wobei $g' : \mathrm{span}(u_{k+1}^1, \dots, u_n^1) \rightarrow \mathrm{span}(u_{k+1}^2, \dots, u_n^2) : u_i^1 \rightarrow u_i^2$.
Diese ist folglich eine Isometrie und hat Matrixform bezüglich gewählter Basen:

$$A_g = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 1_{n-k} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 97

Nutze Sesquilinearität des Skalarprodukts:

$$\begin{aligned}
& (f(ax + x'), f(y)) \\
\text{nach Voraussetzung:} \quad & = (ax + x', y) \\
\text{Linearität:} \quad & = a\,(x, y) + (x', y) \\
\text{nach Voraussetzung:} \quad & = (af(x), f(y)) + (f(x'), f(y)) \\
\text{Linearität:} \quad & = (af(x) + f(x'), f(y)) \\
& \Rightarrow f(ax + x') = af(x) + f(x')
\end{aligned}$$

Aufgabe 98

Unitär: $A^{-1} = \bar{A}^\intercal$, Hermitesch: $A = \bar{A}^\intercal$, also $A = A^{-1} = \bar{A}^\intercal$, $E = AA = AA^{-1}$, wobei E die Einheitsmatrix ist.

Betrachte Eigenwertgleichung, es sei v ein beliebiger Eigenvektor mit Eigenwert λ:

$$\begin{aligned} & Av = \lambda v \\ \Rightarrow \quad & Ev = AAv \\ \Rightarrow \quad & 1v = A\lambda v = \lambda^2 v, \Rightarrow \lambda^2 = 1, \Rightarrow \lambda = \pm 1 \end{aligned}$$