Aufgabe 7

Vektorschreibweise der verschiedenen Zustände:

$$|0\,0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad |1\,0\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad |0\,1\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad |1\,1\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad |0_v\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Die Operatoren wirken folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&\hat{a}_0|0,0\rangle = |0_v\rangle, \quad \hat{a}_0|1,0\rangle = |0,0\rangle, \quad \hat{a}_0|0,1\rangle = |0_v\rangle, \quad \textbf{aber: } \hat{a}_0|1,1\rangle = -|0,1\rangle \\
&\hat{a}_0^\dagger|0,0\rangle = |1,0\rangle, \quad \hat{a}_0^\dagger|1,0\rangle = |0_v\rangle, \quad \textbf{aber: } \hat{a}_0^\dagger|0,1\rangle = -|1,1\rangle, \quad \hat{a}_0^\dagger|1,1\rangle = |0_v\rangle \\
&\hat{a}_1|0,0\rangle = \hat{a}_1|1,0\rangle = |0_v\rangle, \quad \hat{a}_1|0,1\rangle = |0,0\rangle, \quad \hat{a}_1|1,1\rangle = |1,0\rangle \\
&\hat{a}_1^\dagger|0,0\rangle = |0,1\rangle, \quad \hat{a}_1^\dagger|1,0\rangle = |1,1\rangle, \quad \hat{a}_1^\dagger|0,1\rangle = \hat{a}_1^\dagger|1,1\rangle = |0_v\rangle
\end{aligned}$$

Dadurch lässt sich die Matrixschreibweise für die verschiedenen Operatoren ableiten:

$$\hat{a}_0 = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \quad \hat{a}_0^\dagger = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}, \quad \hat{a}_1 = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \quad \hat{a}_1^\dagger = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

Wie leicht zu sehen, ergeben sich die adjungierten Operatoren wie vorgegeben.
Es gilt, folgende Kommutatoren zu zeigen:

$$\left\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right\} = \delta_{ij}\hat{1}, \quad \{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = \hat{0}, \quad \left\{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\right\} = \hat{0}$$

$$\left\{\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger\right\} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\left\{\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger\right\} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\left\{\hat{a}_0, \hat{a}_1^\dagger\right\} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\left\{\hat{a}_1, \hat{a}_0^\dagger\right\} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\hat{a}_0\hat{a}_0 = \hat{a}_1\hat{a}_1 = \hat{a}_0^\dagger\hat{a}_0^\dagger = \hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1^\dagger = 0 \rightarrow \{\hat{a}_0, \hat{a}_0\} = \{\hat{a}_1, \hat{a}_1\} = \{\hat{a}_0^\dagger, \hat{a}_0^\dagger\} = \{\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1^\dagger\} = 0$$

$$\{\hat{a}_0, \hat{a}_1\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\hat{a}_0^\dagger, \hat{a}_1^\dagger\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

Die Operatoren sind definiert als:

$$\hat{\psi}(\xi) = \sum_i \varphi_i(\xi)\hat{a}_i, \qquad \hat{\psi}^+(\xi) = \sum_i \varphi_i^\dagger(\xi)\hat{a}_i^+$$

Es gilt:

- Fermionen: $\left\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right\} = \delta_{ij}\hat{1}, \quad \{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = \hat{0}, \quad \left\{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\right\} = \hat{0}$
- Bosonen: $\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right] = \delta_{ij}\hat{1}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = \hat{0}, \quad \left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\right] = \hat{0}$

Zur Besseren Übersicht soll im folgenden der Kommutator mit $[\cdot,\cdot]_+$ und der Antikommutator analog mit $[\cdot,\cdot]_-$ bezeichnet werden, dabei wird der Antikommutator für Fermionen, der Kommutator für Bosonen verwendet.

$$\left[\hat{\psi}(\xi)\hat{\psi}(\xi')\right]_\pm = \sum_{i,j} [\varphi_i(\xi)\hat{a}_i, \varphi_j(\xi')\hat{a}_j]_\pm = \sum_{i,j} \varphi_i(\xi)\varphi_j(\xi') \underbrace{[\hat{a}_i, \hat{a}_j]_\pm}_{=0} = 0$$

$$\left[\hat{\psi}^\dagger(\xi)\hat{\psi}^\dagger(\xi')\right]_\pm = \sum_{i,j} \left[\varphi_i^\dagger(\xi)\hat{a}_i^\dagger, \varphi_j^\dagger(\xi')\hat{a}_j^\dagger\right]_\pm = \sum_{i,j} \varphi_i^\dagger(\xi)\varphi_j^\dagger(\xi') \underbrace{\left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\right]_\pm}_{=0} = 0$$

$$\left[\hat{\psi}(\xi)\hat{\psi}^\dagger(\xi')\right]_\pm = \sum_{i,j} \left[\varphi_i(\xi)\hat{a}_i, \varphi_j^\dagger(\xi')\hat{a}_j^\dagger\right]_\pm = \sum_{i,j} \underbrace{\varphi_i(\xi)\varphi_j^\dagger(\xi')}_{\delta_{ij}\delta(\xi-\xi')} \underbrace{\left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\right]_\pm}_{\delta_{ij}\hat{1}} = \delta(\xi-\xi')\hat{1}$$

Aufgabe 9

In Abhängigkeit von V ergeben sich bei $N = 2$ Teilchen die möglichen Eigenwerte $0, 1, 2$, (Kein/Eins/Zwei Teilchen in V).
Dabei erhält man die zugehörigen Eigenfunktion zu:

$n_v = 0$: $\psi_0(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)})$: $\quad \mathrm{supp}(\psi_0) \cap V = 0$

$n_v = 1$: $\psi_1(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)})$: $\quad \mathrm{supp}(\psi_1) \cap V \neq 0 \wedge \mathrm{supp}(\psi_1) \cup V \neq 0$

$n_v = 2$: $\psi_2(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)})$: $\quad \mathrm{supp}(\psi_2) \subseteq V$

Andere Eigenfunktionen sind nicht möglich, so ergibt sich ein allgemeiner, normierter Zustand zu

$$\psi = c_0\psi_0 + c_1\psi_1 + c_2\psi_2, \quad \|\psi\| = 1$$

Die Messwahrscheinlichkeit ergibt sich als Projektor auf die entsprechende Eigenfunktion. Sei V_c der zu V komplementäre Raum, dann erhält man die Wahrscheinlichkeiten zu:

$$\begin{aligned}
\|\psi_0\| &= \int_{V_c \times V_c} \|\psi\| \, \mathrm{d}\vec{x}^{(1)} \, \mathrm{d}\vec{x}^{(2)} \\
\|\psi_1\| &= \int_{V_c \times V} \|\psi\| \, \mathrm{d}\vec{x}^{(1)} \, \mathrm{d}\vec{x}^{(2)} + \int_{V \times V_c} \|\psi\| \, \mathrm{d}\vec{x}^{(1)} \, \mathrm{d}\vec{x}^{(2)} \\
\|\psi_2\| &= \int_{V \times V} \|\psi\| \, \mathrm{d}\vec{x}^{(1)} \, \mathrm{d}\vec{x}^{(2)}
\end{aligned}$$