Aufgabe 5

Bekanntermaßen hat ein Teilchen im gegebenen Potential, was dem eines harmonischen Oszillators entspricht, die Energie: $E_{n,1} = \hbar\omega(\frac{3}{2} + n), \omega^2 = \frac{2A}{m}$.

Bosonen Für ein System von N Bosonen ist die Betrachtung trivial, das System hat im Grundzustand die Energie $E_{0,N} = NE_{0,1} = N\frac{3}{2}\hbar\omega = 15\hbar\omega$

Fermionen Unterteile Fermionen in Teilchen mit Entartung $g = 2l+1$. Formell ergibt sich die Grundzustandsenergie zu:

$$E_{0,N} = \sum_{n=0} g_n E_{n,1},\ g_n = \begin{cases} g, & n < \left\lfloor \frac{10}{g} \right\rfloor \\ 10 - (n-1)g, & n = \left\lfloor \frac{10}{g} \right\rfloor \\ 0, & n > \left\lfloor \frac{10}{g} \right\rfloor \end{cases}$$

Es folgt damit für $N = 10$:

- $s = 1/2:\quad E_{0,N=10} = 2(1/2 + 3/2 + 5/2 + 7/2 + 9/2)3\hbar\omega = 75\hbar\omega$
- $s = 3/2:\quad E_{0,N=10} = [4(1/2 + 3/2) + 2(5/2)]\,3\hbar\omega = 54\hbar\omega$
- $s = 5/2:\quad E_{0,N=10} = [6 \cdot 1/2 + 4 \cdot 3/2]\,3\hbar\omega = 27\hbar\omega$
- $s \geq 7/2:\quad E_{0,N=10} = [10 \cdot 1/2]\,3\hbar\omega = 15\hbar\omega$

Aufgabe 6

$$\varphi_S(1,2,\ldots,N) = \sum_{\text{Perm.}} \hat{\mathrm{P}}\varphi_a\,\varphi_b(2)\cdots\varphi_n(N), \quad \varphi_A(1,2,\ldots,N) = \sum_{Perm.} (-1)^{j(\hat{\mathrm{P}})}\hat{\mathrm{P}}\varphi_a\,\varphi_b(2)\cdots\varphi_n(N)$$

Es sei $\hat{\mathrm{P}} \in S_N$, der symmetrischen Gruppe aller Permutationen der Menge $\{1..N\}$. Nimmt man an, dass die Wellenfunktionen $\varphi_a, \ldots, \varphi_n$ normiert sind, so gilt für das Skalarprodukt mit einer bestimmten Permutation dieser Funktion:

$$\langle\varphi_S|\hat{\mathrm{P}}\varphi_S\rangle = \prod_{i=1}^{N}\langle\varphi_{a_i}|\varphi_{\hat{\mathrm{P}}(a_i)}\rangle = \begin{cases} 1, & \forall a_i = \hat{\mathrm{P}}(a_i) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies gilt unter der Voraussetzung, dass alle $|\varphi_{a_i}\rangle$ voneinander verschieden sind, entsprechend gibt es nur die Identität als einzige Permutation mit einem nichtnegativen Ergebnis.
Sind N_i der N Teilchen identisch, so folgt das es mehrere mögliche $\hat{\mathrm{P}} \in S_N$ gibt, deren Zahl ist folglich $N_i!$.
Da beide Argumente des Skalarproduktes eine Summe über alle Permutationen bilden, lässt sich eine als fest betrachten, während die andere frei permutiert (erlaubt Einbeziehung obiger Betrachtung). Betrachtet man nun noch diese möglichen Permutationen, folgt ein Faktor $N!$.

$$\langle\varphi_S|\varphi_S\rangle = \sum_{\hat{\mathrm{P}}_1\in S_N}\sum_{\hat{\mathrm{P}}_2\in S_N}\prod_{i=1}^{N}\langle\varphi_{\hat{\mathrm{P}}_1(a_i)}|\varphi_{\hat{\mathrm{P}}_2(a_i)}\rangle = \sum_{\hat{\mathrm{P}}_1\in S_N}\prod_{i=1}^{N} N_i = N!\prod_{i=1}^{N} N_i$$

Das Ergebnis für φ_A folgt analog obiger Betrachtung jedoch mit dem Unterschied, dass zu jeder Zeit $N_i = 1$ gilt (da Fermionen), es dürfen nie zwei Teilchen im selben Zustand sein, entsprechend geht in das Skalarprodukt nur die gesamte Zahl der möglichen Permutationen ein, $N!$:

$$\langle\varphi_A|\varphi_A\rangle = N!$$