Übung Quantenmechanik 2, Übung 3

Sven Buder

23. April 2013

Zu Beginn wurden die beiden Übungsaufgaben besprochen.

Zusammengesetzte Hilberträume

$|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1$ und $|\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2$. Nun bilden wir das Tensorprodukt von $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$:

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \tag{1}$$

Eigenschaften

1. Linear bezüglich jedes Eintrags $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\psi\rangle, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_2$:

$$(\alpha |\psi\rangle + \beta |\psi\rangle) \otimes |\chi\rangle = (\alpha |\psi\rangle) \otimes |\chi\rangle + (\beta |\psi\rangle) |\chi\rangle \tag{2}$$

   - analog für zweiten Eintrag
   - Multiplikation mit einer komplexen Zahl, wobei $\alpha \in \mathbb{C}, |\psi\rangle \in \mathcal{H}_1, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}_2$

$$\alpha(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) = (\alpha |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle = |\psi\rangle \otimes (\alpha |\varphi\rangle) \tag{3}$$

2. Es gibt Vektoren in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, die <u>nicht</u> als <u>einfaches Produkt</u> $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ zweier Vektoren $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$ und $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}_2$ geschrieben werden können.
   Aber: als <u>Summe solcher Produkte</u>
   $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_{N_1}\rangle\}$ und $\{|f_1\rangle, |f_2\rangle, \ldots, |f_{N_2}\rangle\}$ seien Basen bezüglich $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$

$$\{|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle\} : i = 1, \ldots, N_1; j = 1, \ldots N_2\} \tag{4}$$

   ist eine Basis in $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$
   Insbesondere gilt für beliebiges $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \psi_{ij} |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle \qquad \text{mit } \psi_{ij} \in \mathbb{C} \tag{5}$$

$$\dim(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) = \dim(\mathcal{H}_1) \cdot \dim(\mathcal{H}_2) \tag{6}$$

Skalarprodukt

$$|\varphi_1 \varphi_2\rangle := |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \equiv |\varphi_1\rangle |\varphi_2\rangle \tag{7}$$

$$\langle \psi_1 \psi_2 | \varphi_1 \varphi_2\rangle := \langle \psi_1 | \varphi_1\rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \psi_2 | \varphi_2\rangle_{\mathcal{H}_2} \tag{8}$$

mit geeigneter Fortsetzung (auf Summen) ist ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

Tensorprodukte von Operatoren

Seien $\hat{\mathrm{A}}_1$ Operator auf $\mathcal{H}_1$ und $\hat{\mathrm{A}}_2$ Operator auf $\mathcal{H}_2$

$$(\hat{\mathrm{A}}_1 \otimes \hat{\mathrm{A}}_2) |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle = \hat{\mathrm{A}}_1 |\psi\rangle \otimes \hat{\mathrm{A}}_2 |\psi_2\rangle \tag{9}$$

Fortsetzung

$$(\hat{\mathrm{A}}_1 \otimes \hat{\mathrm{A}}_2) |\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \psi_{ij} (\hat{\mathrm{A}}_1 |e_i\rangle) \otimes (\hat{\mathrm{A}}_2 |f_j\rangle) \tag{10}$$

Bemerkung: nicht jeder Operator auf $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ kann in der Form $\hat{\mathrm{A}}_1 \otimes \hat{\mathrm{A}}_2$ geschrieben werden, aber als Summe solcher Produkte.
Wir betrachten nun $\hat{\mathrm{A}}_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ sowie analog $\hat{\mathrm{A}}_2 : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$

$$\hat{\mathrm{A}}_1 \otimes \hat{1}_{\mathcal{H}_2} : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \tag{11}$$
$$\hat{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes \hat{\mathrm{A}}_2 : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \tag{12}$$

Bemerkungen:

- $\hat{\mathrm{A}}_1$ sei nicht entartet auf $\mathcal{H}_1$
  Der Operator $\hat{\mathrm{A}}_1 \otimes \hat{1}_{\mathcal{H}_2}$ ist (im Allgemeinen) hochgradig entartet:

$$(\hat{\mathrm{A}}_1 \otimes \hat{1}_{\mathcal{H}_2}) \underbrace{|\alpha\rangle |\varphi\rangle} = \hat{\mathrm{A}}_1 |\alpha\rangle \otimes \hat{1}_{\mathcal{H}_2} |\varphi\rangle = a \underbrace{|\alpha\rangle |\varphi\rangle} \qquad \forall |\varphi\rangle \in \mathcal{H}_2 \tag{13}$$

- Der Kommutator

$$[\hat{\mathrm{A}}_1 \otimes \hat{1}_{\mathcal{H}_2}, \hat{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes \hat{\mathrm{A}}_2] = \hat{0} \tag{14}$$
$$(\hat{\mathrm{A}}_1 \otimes \hat{1}_{\mathcal{H}_2})(\hat{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes \hat{\mathrm{A}}_2) = \hat{\mathrm{A}}_1 \hat{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes \hat{\mathrm{A}}_2 \hat{1}_{\mathcal{H}_2} = \hat{\mathrm{A}}_1 \otimes \hat{\mathrm{A}}_2 \tag{15}$$
$$\text{mittels} \qquad (\hat{\mathrm{A}} \otimes \hat{\mathrm{B}})(\hat{\mathrm{C}} \otimes \hat{\mathrm{D}})(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = (\hat{\mathrm{A}} \otimes \hat{\mathrm{B}})(\hat{\mathrm{C}} |\psi_1\rangle \otimes \hat{\mathrm{D}} |\psi_2\rangle) \tag{16}$$
$$= \hat{\mathrm{A}}\hat{\mathrm{C}} |\psi_1\rangle \otimes \hat{\mathrm{B}}\hat{\mathrm{D}} |\psi_2\rangle \tag{17}$$
$$= (\hat{\mathrm{A}}\hat{\mathrm{C}} \otimes \hat{\mathrm{B}}\hat{\mathrm{D}}) |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \tag{18}$$

  analog ergibt sich $(\hat{1}_{\mathcal{H}_1} \otimes \hat{\mathrm{A}}_2)(\hat{\mathrm{A}}_1 \otimes \hat{1}_{\mathcal{H}_2}) \cdots = \hat{\mathrm{A}}_1 \otimes \hat{\mathrm{A}}_2$

Beispiel: Addition eines Spin-$\frac{1}{2}$-Operators Hier nehmen wir $\hat{\vec{\mathrm{s}}}^{(1)}, \hat{\vec{\mathrm{s}}}^{(2)}$ als Spinoperatoren mit

$$\text{Gesamtspin} \qquad \hat{\vec{\mathrm{s}}} = \hat{\vec{\mathrm{s}}}^{(1)} + \hat{\vec{\mathrm{s}}}^{(2)} \tag{19}$$

und betrachten die Zustände im Produktraum:

$$|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle |\uparrow\rangle \qquad |\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle |\downarrow\rangle \tag{20}$$
$$|\uparrow\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle |\downarrow\rangle \qquad |\downarrow\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle |\uparrow\rangle \tag{21}$$
$$\tag{22}$$

Es gilt:

$$\hat{\mathrm{s}}_z |\uparrow\uparrow\rangle = \hbar |\uparrow\uparrow\rangle \qquad \hat{\mathrm{s}}_z |\uparrow\downarrow\rangle = |0_v\rangle \tag{23}$$
$$\hat{\mathrm{s}}_z |\downarrow\uparrow\rangle = |0_v\rangle \qquad \hat{\mathrm{s}}_z |\downarrow\downarrow\rangle = -\hbar |\downarrow\downarrow\rangle \tag{24}$$
$$\hat{\mathrm{s}}_z = \hat{\mathrm{s}}_z^{(1)} + \hat{\mathrm{s}}_z^{(2)} = (\hat{\mathrm{s}}_z^{(1)} \otimes \hat{1}) + (\hat{1} \otimes \hat{\mathrm{s}}_z^{(2)}) \tag{25}$$

Beispiel:

$$\hat{\mathrm{s}}_z |\uparrow\downarrow\rangle = (\hat{\mathrm{s}}_z^{(1)} \otimes \hat{1}) |\uparrow\downarrow\rangle + (\hat{1} \otimes \hat{\mathrm{s}}_z^{(2)}) |\uparrow\downarrow\rangle \tag{26}$$
$$= \hat{\mathrm{s}}_z^{(1)} |\uparrow\rangle \otimes \hat{1} |\downarrow\rangle + \hat{1} |\uparrow\rangle \otimes \hat{\mathrm{s}}_z^{(2)} |\downarrow\rangle \tag{27}$$
$$= \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle \downarrow + \left(-\frac{\hbar}{2}\right) |\uparrow\rangle |\downarrow\rangle = |0_v\rangle \tag{28}$$

Vergleiche Vorlesung: $\hat{s}_z^{(1)} = j_1 = \frac{1}{2}$, $\hat{s}_z^{(2)} = j_2 = \frac{1}{2}$, wobei $\dim(\mathcal{H}_1) = \dim(\mathcal{H}_2) = 2$

Notation:

$$|j_1\, j_2\, m_1\, m_2\rangle \to \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\, m_1\, m_2\right\rangle \tag{29}$$

$$\left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle\,|\uparrow\rangle \tag{30}$$

$$\left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle = \left|-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle \tag{31}$$

$$\left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\right\rangle = \left|\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\right\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle \tag{32}$$

$$\left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\right\rangle = \left|-\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\right\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \tag{33}$$

$$|j_1\, j_2\, j\, m\rangle = \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\, j\, m\right\rangle \equiv |j\, m\rangle \tag{34}$$

In der Vorlesung wurde hier geschrieben:

$$|j\, m\rangle = \sum_{\substack{m_1\, m_2 \\ m_1 + m_2 = m}} |m_1\, m_2\rangle\,\langle m_1\, m_2|\; j\, m\rangle \tag{35}$$

$$|1\,1\rangle = \sum_{m_1\, m_2} |m_1\, m_2\rangle\,\langle m_1\, m_2|\; 1\,1\rangle \tag{36}$$

$$= \left|\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right\rangle \left\langle \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\right|\; 1\,1\Big\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle\,\langle\uparrow\uparrow\,|\; 1\,1\rangle \tag{37}$$

analog folgt:

$$|1\,0\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle\,\langle\uparrow\downarrow\,|\; 1\,0\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\,\langle\downarrow\uparrow\,|\; 1\,0\rangle \tag{38}$$

Wie bekommt man die Koeffizienten? 1. Variante: Es gilt:

$$\vec{s}^2 = (\hat{\vec{s}}^{(1)})^2 + (\hat{\vec{s}}^{(2)})^2 + 2\hat{\vec{(s)}}^{(1)}\hat{\vec{(s)}}^{(2)} \tag{39}$$

$$= \frac{3}{2}\hbar^2\hat{1} + 2\hat{s}_3^{(1)}\hat{s}_3^{(2)} + \hat{s}_+^{(1)}\hat{s}_-^{(2)} + \hat{s}_-^{(1)}\hat{s}_+^{(2)} \qquad \text{siehe später} \tag{40}$$

$$\hat{\vec{s}}^2\,|\uparrow\uparrow\rangle = (\frac{3}{2}\hbar^2 + 2\frac{\hbar}{2}\frac{\hbar}{2})\,|\uparrow\uparrow\rangle = 2\hbar^2\,|\uparrow\uparrow\rangle \tag{41}$$

$$\hat{\vec{s}}^2\,|\downarrow\downarrow\rangle = (\frac{3}{2}\hbar^2 + 2\frac{\hbar}{2}\frac{\hbar}{2})\,|\downarrow\downarrow\rangle = 2\hbar^2\,|\downarrow\downarrow\rangle \tag{42}$$

$$|\uparrow\uparrow\rangle = |1\,1\rangle \qquad (j_1\,, m = 1) \tag{43}$$

$$|\downarrow\downarrow\rangle = |1\,-1\rangle \qquad (j = 1\,, m = -1) \tag{44}$$

$$\hat{\vec{j}}^2\,|j\,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)\,|j\,m\rangle \tag{45}$$

$$\hat{J}_z\,|k\,m\rangle = \hbar m\,|j\,m\rangle \tag{46}$$