

Übung Quantenmechanik 2, Übung 1

Sven Buder

09. April 2013

Wiederholung

mathematische ‘Räume‘

Vektorraum V mit	zusätzliche Struktur	plus Vollständigkeit
Metrik	metrischer Raum	vollständiger metrischer Raum
Norm	normierter Raum	<u>Banachraum</u>
<u>Skalarprodukt</u> (Innenprodukt)	Prähilbertraum	<u>Hilbertraum</u>

Spezieller nach unten hin und nach rechts hin.

Definitionen

- Vektorraum $[V, +, \mathbb{K}]$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
- metrischer Raum $[M, d]$
- Norm, z.B. $d(x, y) = \|x - y\|$
- vollständiger Raum (Stichwort ‘Cauchy-Folge‘)
- Skalarprodukt (reell, komplex)

Metrik

M. beliebige Menge

$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Metrik auf M, wenn für beliebige Elemente $x, y, z \in M$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Norm

ist eine Abbildung in die nichtnegativen Zahlen

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \|x\|$$

1. $\|x\| = 0 \rightarrow x = 0$
2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Skalarprodukt

für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

1. $(v, v) \geq 0$ und $(v, v) = 0 \iff v = 0$
2. $(u, v) = (v, u)$
3. $(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 (u_1, v) + \alpha_2 (u_2, v)$

Im euklidischen Raum: $[\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}]$

für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$

1. $(v, v) \geq 0$ und $(v, v) = 0 \iff v = 0$
2. $(u, v) = (v, u)^*$ wobei gilt $z = a + bi$ und $\bar{z} = z^* = a - bi$
3. $(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 (u, v_1) + \alpha_2 (u, v_2)$

Folgerung

Beachte: Konstanten im ersten Skalarfaktor werden hier definitionsgemäß beim Ausklammern komplex konjugiert, Konstanten im zweiten hingegen nicht!

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) \stackrel{2)}{=} (v, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)^* \stackrel{3)}{=} [\alpha_1 (v, u_1) + \alpha_2 (v, u_2)]^* = \alpha_1^* (v, u_1)^* + \alpha_2^* (v, u_2)^* \stackrel{3)}{=} \alpha_1^* (u_1, v) + \alpha_2^* (u_2, v)$$

Insbesondere:

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) \neq \alpha_1 (u_1, v) + \alpha_2 (u_2, v)$$

In der Quantenmechanik

Hilbertraum $\mathcal{H}$

- komplexer Hilbertraum: $|\varphi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}, [\mathcal{H}, +, \mathbb{C}]$

Skalarprodukt $\langle \varphi | \psi \rangle$

1. $\langle \varphi | c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 \rangle = c_1 \langle \varphi | \psi_1 \rangle + c_2 \langle \varphi | \psi_2 \rangle$
 2. $\langle \varphi | \psi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle^*$
 3. $\langle \varphi | \varphi \rangle > 0$ für $|\varphi\rangle \neq |0_v\rangle$
- $(\langle \varphi | \psi \rangle)$: Skalarprodukt des geordneten Paares $(|\psi\rangle, |\varphi\rangle)$
 - $\langle \varphi | c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 \rangle$ bedeutet das Skalarprodukt des Paares $(c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle, \varphi)$

Norm

$$\| |\psi\rangle \| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle} \quad (*) \quad (1)$$

1. $\| |\psi\rangle \| > 0$ für $|\psi\rangle \neq |0_v\rangle$
2. $\| |\psi\rangle + |\varphi\rangle \| \leq \| |\psi\rangle \| + \| |\varphi\rangle \|$
3. $\| c |\psi\rangle \| = |c| \| |\psi\rangle \|$

Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle \varphi | \psi \rangle| \leq \| |\varphi\rangle \| \cdot \| |\psi\rangle \|$$

Sonstiges

- $|\psi\rangle, |\varphi\rangle$ sind orthogonal $\xLeftrightarrow{\text{Def.}} \langle \psi | \varphi \rangle = 0$
- Vollständigkeit von $\mathcal{H}$ in der durch das Skalarprodukt definierten Norm (siehe Gl. Gleichung 1):

$$\| |\psi_m\rangle - |\psi_n\rangle \| < \varepsilon \text{ für } m, n > N \Rightarrow \exists |\psi\rangle \in \mathcal{H} \text{ mit } |\psi_m\rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |\psi\rangle$$

- Separabilität: $\exists$ abzählbare unendliche Teilmenge $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{H}$, die dicht in $\mathcal{H}$ ist

Satz

In jedem Hilbertraum $\mathcal{H}$ gibt es ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS):

$$\begin{aligned} \{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^\infty \quad \quad \langle \psi_i | \psi_j \rangle &= \delta_{ij} \\ |\psi\rangle &= \sum_{i=1}^\infty c_i |\psi_i\rangle \text{ mit } c_i = \langle \psi_i | \psi \rangle \quad | \cdot \langle \psi_j | \\ \langle \psi_j | \psi \rangle &= \sum_{i=1}^\infty c_i \underbrace{\langle \psi_j | \psi_i \rangle}_{\delta_{ij} = \delta_{ji}} \\ &= c_j \\ |\psi\rangle &= \sum_{i=1}^\infty \langle \psi_i | \psi \rangle |\psi_i\rangle \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^\infty |\psi_i\rangle \langle \psi_i |}_{\hat{i} \text{ Einheitsoperator}} |\psi\rangle \end{aligned}$$

Dualer Raum

["Bra-Vektoren" $\langle \psi |$ in $\mathcal{H}'$, "Ket-Vektoren" $|\psi\rangle$ in $\mathcal{H}$]

Ket-Vektoren: $|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^\infty a_i |\psi_i\rangle$

Darstellungen von $|\alpha\rangle$: $|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$ und $|\beta\rangle = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$, also Spaltenvektoren

Skalarprodukt von $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$: $\langle \beta | \alpha \rangle = \sum_{i=1}^\infty b_i^* a_i$

Interpretation von $\langle \beta |$ als Bra-Vektor dargestellt als Zeilenvektor: $\langle \beta | = (b_1^*, b_2^*, \dots)$

$|\beta\rangle = \sum_{i=1}^\infty b_i |\psi_i\rangle \longleftrightarrow \langle \beta | = \sum_{i=1}^\infty b_i^* \langle \psi_i |$ mit $\langle \beta | \psi_j \rangle = b_j^*$

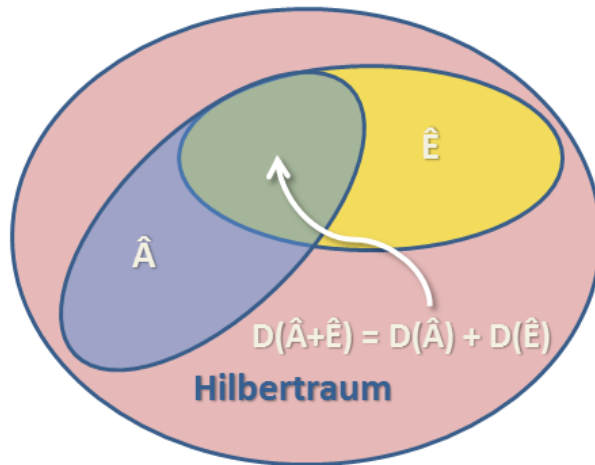
$\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^\infty$ Basis in $\mathcal{H} \iff \{\langle \psi_i | \}_{i=1}^\infty$ Basis in $\mathcal{H}'$

Operatoren in Hilberträumen

$$\hat{A} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad \text{genauer} \quad \underbrace{D(\hat{A})}_{\text{Def.-Bereich}} \longrightarrow \underbrace{W(\hat{A})}_{\text{Werte-Bereich}}$$

$$|\psi\rangle \longmapsto \underbrace{\hat{A}|\psi\rangle}_{|\psi'\rangle \in \mathcal{H}}$$

$(\hat{A} + \hat{E})|\psi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle + \hat{E}|\psi\rangle$, aber: Definitionsbereich beachten (siehe Skizze)!



$$\hat{A}^0 = \hat{I} \quad \hat{A}^1 = \hat{A} \quad \hat{A}^2 = \hat{A}\hat{A} \quad \dots$$