## Aufgabe 21

### a)

Skizze siehe letzte Seite.
Im gewählten Einheitensystem gilt: $H = p^2/2 + q^2/2$, der Gradient ergibt sich somit zu: $\nabla_H H = q\vec{e_{x_1}} + p\vec{e_{x_2}}$, daraus folgt: $J\nabla_H H = p\vec{e_{x_1}} - q\vec{e_{x_2}}$

### b)

Bekanntermaßen gilt: $\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = X_H$. Es ist dementsprechend zu lösen (vgl. a) ): $\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -q$. Die erste Gleichung nach der Zeit abgeleitet und in die zweite eingesetzt ergibt: $\ddot{q} + q = 0$, man erhält:

$$q(t) = c_1 e^{it} + c_2 e^{-it}, \quad p(t) = c_1 i e^{it} - c_2 i e^{-it}$$

Setzt man die Anfangsbedingungen ein, so erhält man die Formel eines Kreises:

$$q(t) = q_0 \cos(t) + p_0 \sin(t), \quad p(t) = -q_0 \sin(t) + p_0 \cos(t)$$

### c)

Aus b) ergibt sich die Zeitentwicklungsmatrix: $M = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. M ist symplektisch, wenn gilt: $M^T J M = J$.

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ -\cos(t) & \sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J$$

### d) & e)

Skizze: siehe letzte Seite.
Vorgehen wie bei a), mit $x = \begin{pmatrix} z \\ p \end{pmatrix}$. $\nabla_H H = mg\vec{e_z} + \frac{p}{m}\vec{e_p}$, $X_H = -mg\vec{e_p} + \frac{p}{m}\vec{e_z}$. Es folgen die Gleichungen:

$$\dot{z} = \frac{p}{m},\ \dot{p} = -mg \Rightarrow z = -\frac{g}{2}t^2 + \frac{p_0}{m}t + z_0,\ p = -mgt + p_0$$

Die Matrix ist symplektisch, denn:

$$M^T J M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t/m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t/m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t/m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J$$

## Aufgabe 22

Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen im Teil $\Delta$ aus $V$ zu finden, beträgt: $P(\Delta) = \frac{\Delta}{V} \Rightarrow P_n(\Delta) = (\frac{\Delta}{V})^n$, entsprechend folgt für die Wahrscheinlichkeit, es nicht zu finden: $P_n(\neg\Lambda) = (1 - \frac{\Delta}{V})^n$. Um $n$ Teilchen aus $N$ auszuwählen, gibt es $\binom{n}{N} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$.
Entsprechend ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, $n$ Teilchen aus $N$ in $\Lambda$ zu finden, sowie den Rest der

Teilchen nicht darin zu:

$$
\begin{aligned}
P_n &= \frac{N!}{n!(N-n)!}(\frac{\Delta}{V})^n(1-\frac{\Delta}{V})^{N-n} \\
\log P_n &= \log N! - \log n! - \log(N-n)! + n\log\frac{\Delta}{V} + (N-n)\log(1-\frac{\Delta}{V}) \\
&\approx N\log N - N - (N-n)\log(N-n) + (N-n) + n\log\frac{\Delta}{V} - <n> - n\log(1-\frac{\Delta}{V}) - \log n! \\
&\approx \underbrace{-N\log(1-\frac{n}{N})}_{n} + n\log(N-n) - n + n\log\frac{\Delta}{V} - <n> - n\log(1-\frac{\Delta}{V}) - \log n! \\
&\approx - <n> - \log n! + n\left[\log(N-n) + \log\frac{\Delta}{V} - \log(1-\frac{\Delta}{V)}\right] \\
&\approx - <n> - \log n! + n\left[\log\frac{(N-n)\Delta}{V(1-\frac{\Delta}{V}}\right] \\
&= - <n> - \log n! + n\left[\log\frac{1-\overbrace{\frac{n}{N}}^{\to 0}}{\frac{V}{\Delta N} - \underbrace{\frac{1}{N}}_{\to 0}}\right] \\
&\approx - <n> - \log n! + n\log <n> \\
\Rightarrow P_n &= \frac{<n>^n}{n!}\exp(- <n>)
\end{aligned}
$$

## Aufgabe 23

Es gilt für den Impuls im Phasenraum: $p_i = \sqrt{2mE_i}$, somit gilt für Energien im Intervall $[E-\epsilon, E]$: $\sqrt{2m(E-\epsilon)} < p < \sqrt{2mE}$; $E = \frac{p^2}{2m}, \to \mathrm{d}E = \frac{p}{m}\,\mathrm{d}p \to \mathrm{d}p = \frac{m}{p}\,\mathrm{d}E = \frac{m}{\sqrt{2mE}}\,\mathrm{d}E$
Für das Volumen einer $3N$-dimensionalen Kugel mit Radius $p$ gilt:

$$
V_{3N}(p) = \frac{\sqrt{\pi}^{3N}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)}p^{3N}, \quad \frac{\mathrm{d}V_{3N}}{\mathrm{d}p}\frac{\sqrt{\pi}^{3N}}{\Gamma(\frac{3N}{2}+1)}3Np^{3N-1}, \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{\mathrm{d}V_{3N}}{V_{3N}}}_{\text{Verhältnis von Schale zu Volumen}} = \frac{3N}{p}\,\mathrm{d}p = \frac{3N}{2E}\,\mathrm{d}E
$$