Aufgabe 33

Die Von-Neumann-Gleichung lautet:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{\imath}{\hbar}\left[\hat{\mathrm{H}}, \hat{\rho}\right]$$

Die allgemeine Lösung mit unitärem Zeitentwicklungsoperator lautet:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\mathrm{U}}(t)\hat{\rho}(0)\hat{\mathrm{U}}^\dagger(t)$$

Außerdem gilt die Relation (siehe QM-Script):

$$f(A_H, B_H, ...) = (f(A, B, ...))_H$$

Daraus folgt:

$$\hat{\rho}(t)\log\hat{\rho}(t) = \hat{\mathrm{U}}(t)\hat{\rho}(0)\log\hat{\rho}(0)\hat{\mathrm{U}}^\dagger(t)$$

Für die Entropie $S = -k\langle\log\hat{\rho}\rangle$ folgt mit der Relation $\langle\hat{\mathrm{A}}\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{\mathrm{A}})$ für deren Zeitentwicklung

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\log\hat{\rho}\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\log\hat{\rho}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Tr}\left[\hat{\mathrm{U}}(t)\hat{\rho}(0)\log\hat{\rho}(0)\hat{\mathrm{U}}^\dagger(t)\right]\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}(0)\log\hat{\rho}(0)\hat{\mathrm{U}}^\dagger(t)\hat{\mathrm{U}}(t)\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

Wobei im vorletzten Schritt die zyklische Invarianz der Spur ausgenutzt wurde. Folglich ist die Entropie zeitlich konstant

Aufgabe 34

Es gilt: $z = \exp(\beta\mu) = \exp(-\alpha)$ daraus folgt:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\alpha} = -z\frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) = z\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Analog für $\alpha = -\beta\mu$ daraus folgt:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\alpha} = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) = \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}$$

Aufgabe 35

Nimmt man als ursprüngliche Definition: "Danach ist die Entropie eines Gases von Partikeln proportional zur WahrscheinlichkeitW, das System von Partikel in dem vorgegebenen Zustand zu finden". Nach dieser Aussage gibt es für $T \to 0$ nur einen möglichen Mikrozustand des Fermigases, entsprechend ist die Entropie 1. Verwendet man die logarithmische Abhängigkeit der Entropie von der Wahrscheinlichkeit, so erhält man folglich 0.

Aufgabe 36