Aufgabe 30

a)

K ist die Summe aller einzelnen Quantenzahlen n_i der N Oszillatoren. Diese K Energiequanten werden auf N nicht unterscheidbare Oszillatoren aufgeteilt. Dies entspricht dem K-maligen Werfen eines N-seitigen Würfels, wobei jeder Wurf der Verteilung eines Energiequants auf einen der N Oszillatoren entspricht. Die Anzahl der Möglichkeiten ergibt sich dabei zu:

$$\Omega = \left(\!\!\binom{N}{K}\!\!\right) = \binom{N+K-1}{N-1} = \frac{(N+K-1)!}{(N-1)!K!}$$

Bekanntermaßen gilt für die Entropie: $S = k\log\Omega$, somit folgt:

$$\begin{aligned}
S = k\log\Omega = k\log\frac{(N+K-1)!}{(N-1)!K!} &= k\log(N+K-1)! - k\log(N-1)! - k\log K! \\
&\approx k\left[(N+K-1)\log(N+K-1) - (N+K-1) - (N-1)\log(N-1) + (N-1) - K\log K + K\right] \\
&\approx k\left[(N+K-1)\log(N+K-1) - (N-1)\log(N-1) - K\log K\right] \\
&\approx k\left[(N+K)\log(N+K) - (N-1)\log(N) - K\log K\right], \text{ da: } N, K \gg 1
\end{aligned}$$

b)

Nutze $K = K(E)$ da $E = E(K), E = N\frac{\hbar\omega}{2} + K\hbar\omega \rightarrow K = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial E} &= \frac{\partial S}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial E}, \quad \frac{\partial K}{\partial E} = \frac{1}{\hbar\omega} \\
\frac{\partial S}{\partial K} &= k\left[\log(N+K) + \frac{K}{K} - \log K - \frac{K}{K}\right] \\
&= k\log\frac{N+K}{K} \\
\frac{1}{T} &= \frac{k}{\hbar\omega}\log\frac{N+K}{K} \Rightarrow T = \frac{\hbar\omega}{k}\left(\log\frac{N+K}{K}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Aus $T = T(K)$ lässt sich $K = K(T)$ und damit $\frac{K(T)}{N}$ berechnen.

$$\begin{aligned}
\log\frac{N+K}{K} = \frac{\hbar\omega}{kT} &\rightarrow \frac{N+K}{K} = \exp\frac{\hbar\omega}{kT} \\
K(\exp\frac{\hbar\omega}{kT} - 1) = N &\Rightarrow \frac{K(T)}{N} = \frac{1}{\exp\frac{\hbar\omega}{kT} - 1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 31

a)

Die möglichen Gesamtenergien $E_j = \epsilon_{1,r} + \epsilon_{2,s}$. Dabei ergeben sich 4 verschiedene Zustände: $(j) \rightarrow (r,s) \Rightarrow \{j\} \rightarrow \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$, $\{E\} = \{0,\Delta,\Delta,2\Delta\}$. Für die Zustandssumme $Z = \sum_j \exp(-\beta E_j)$ folgt:

$$Z = 1 + 2\exp(-\beta\Delta) + \exp(-2\beta\Delta) = (1+\exp(-\beta\Delta))^2$$

Wie man leicht sieht, gilt für die Einteilchen-Zustandssumme $z = 1+\exp(-\beta\Delta)$, bei N gleichen Teilchen ergibt sich die Zustandssumme $Z = z^N$. Für die freie Energie $F = -kT\log Z$ folgt somit:

$$F = -kNT\log z = -kNT\log\left(1+\exp(-\beta\Delta)\right), \Rightarrow \frac{F}{N} = -kT\log\left(1+\exp(-\beta\Delta)\right)$$

Daraus folgt, dass die Freie Energie eines Teilchens der halben Freien Energie von zwei Teilchen entspricht.

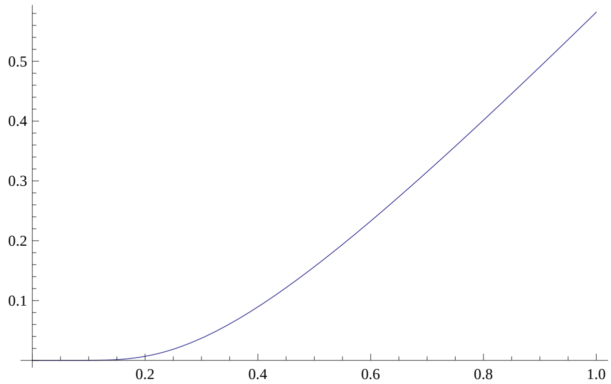

Abbildung 1: Die Funktion für $\frac{\hbar\omega}{k} = 1$; verhält sich für große T wie eine lineare Funktion

b)

Die innere Energie U ist definiert als $U = <\hat{\mathrm{H}}>$:

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z = -\frac{\partial}{\partial\beta}N\log\left(1+\exp(-\beta\Delta)\right)$$
$$U = \frac{N\Delta\exp(-\beta\Delta)}{1+\exp(-\beta\Delta)} = \frac{N\Delta}{1+\exp(\beta\Delta)} \Rightarrow \frac{U}{N} = \frac{\Delta}{1+\exp(\beta\Delta)}$$

Für die Entropie $S = k\log Z + k\beta U$ folgt:

$$S = kN\log\left(1+\exp(-\beta\Delta)\right) - k\beta\frac{\partial}{\partial\beta}N\log\left(1+\exp(-\beta\Delta)\right)$$
$$\Rightarrow \frac{S}{N} = k\left(\log\left(1+\exp(-\beta\Delta)\right) - \beta\frac{\partial}{\partial\beta}\log\left(1+\exp(-\beta\Delta)\right)\right)$$
$$= k(1-\beta\frac{\partial}{\partial\beta})\log z$$

c)

Fermionen unterliegen dem Pauli-Prinzip, so kann ein Zustand immer nur von einem Teilchen besetzt werden, folglich ist die Gesamtenergie für ein zwei-Teilchen-System immer konstant $E = \Delta$.
Bosonen unterliegen nicht dem Pauli-Prinzip, so können mehrere Bosonen den gleichen Zustand besetzen, folglich ergeben sie die möglichen Energien $\{0, \Delta, 2\Delta\}$.
Für die kanonische Zustandssumme von ununterscheidbaren Teilchen folgt als zusätzlicher Faktor $\frac{1}{N!}$, damit die Teilchen nicht mehrfach gezählt werden. Somit folgt für die Zustandssumme :

$$Z = \frac{z^N}{N!}$$

Entsprechend ergeben sich für Freie Energie und Entropie:

$$F = -kT\log Z = -kNT\log z + kT\log N! \approx -kNT\left(\log z - \log N + 1\right), \quad z = 1+\exp(-\beta\Delta)$$
$$S = k(1-\beta\frac{\partial}{\partial\beta})\log Z \approx nK(1-\beta\frac{\partial}{\partial\beta})\left(\log z - \log N + 1\right)$$

Aufgabe 32

a)

Es sei N die Anzahl der Teilchen im System $N \in [1..4]$, und $E_{n,i}$ die mögliche Energie des n-ten Teilchens, $E_{n,i} \in \{0, \Delta\}$.

Die Zustandssumme ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_j \exp(-\beta(\hat{\mathrm{H}} - \mu\hat{\mathrm{N}})) \\ &= \mathrm{e}^{1\mu\beta} \cdot (1 + \exp(-\beta\Delta) \\ &+ \mathrm{e}^{2\mu\beta} \cdot (1 + \exp(-\beta\Delta)^2 \\ &+ \mathrm{e}^{3\mu\beta} \cdot (1 + \exp(-\beta\Delta)^3 \\ &+ \mathrm{e}^{4\mu\beta} \cdot (1 + \exp(-\beta\Delta)^4 \end{aligned}$$

b)

Für N Teilchen erhält man die Zustandssumme zu (solange x wirklich kleiner 1 ist):

$$Z = \sum_i^\infty \mathrm{e}^{i\mu\beta} \cdot (1 + \exp(-\beta\Delta)^i = \sum_i^\infty (x)^i, \quad x = \mathrm{e}^{\mu\beta} \cdot (1 + \exp(-\beta\Delta) < 1$$

$$Z = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mu\beta} \cdot (1 + \exp(-\beta\Delta) - 1}$$

Entsprechend erhält man für das großkanonische Potential:

$$\begin{aligned} J = -kT \log Z &= kT \log \left[\mathrm{e}^{\mu\beta} \cdot (1 + \exp(-\beta\Delta) - \mathrm{e}^{-\mu\beta})\right] \\ &= kT \log \mathrm{e}^{\mu\beta} + kT \log(1 + \exp(-\beta\Delta) - \mathrm{e}^{-\mu\beta}) \\ &= \mu + kT \log(1 + \exp(-\beta\Delta) - \mathrm{e}^{-\mu\beta}) \end{aligned}$$

Für die Entropie $S = -\left(\frac{\partial J}{\partial T}\right)_\mu$ folgt:

$$\begin{aligned} S &= k \log(1 + \exp(-\beta\Delta) - \mathrm{e}^{-\mu\beta}) + \frac{\Delta e^{\frac{\mu}{kT}} - e^{\frac{\Delta}{kT}} \mu}{\left(-e^{\frac{\Delta}{kT}} + e^{\frac{\mu}{kT}} + e^{\frac{\Delta+\mu}{kT}}\right) T} \\ &= k(1 + T\frac{\partial}{\partial T}) \log(1 + \exp(-\beta\Delta) - \mathrm{e}^{-\mu\beta}) \end{aligned}$$

Besonders in der letzten Zeile erkennt man gut die prinzipielle Ähnlichkeit zur Entropie aus *31c)*.