Aufgabe 1

a)

Bei einem 2-Niveausystem ist die Lebensdauer des Endzustandes unendlich, daher ist $\frac{1}{\Delta\tau} \approx 0$

$$\lambda = \frac{c}{f} \to \Delta\lambda = \left|-\frac{c}{f^2}\right| \Delta f \to \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{c}{c}\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta f}{f}$$
$$\Delta x \Delta p = \Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2} \to \Delta E = \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{\hbar}{2\tau}, \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta E}{E} = \frac{\hbar}{2\tau}\frac{\lambda}{hc} = \frac{\lambda}{4\pi c}\frac{1}{\tau}$$

b)

$$m\bar{f} = p = \frac{hf}{c}, \ \bar{f} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \Rightarrow f = \frac{c}{h}\sqrt{2mkT}$$
$$\Delta f = 2\sqrt{\log 2} f \frac{\bar{f}}{c} \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2\sqrt{\log 2}\frac{1}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{8\log 2\; kT}{mc^2}}$$

c)

Die größte Wellenlänge ergibt sich beim Übergang zwischen dem zweiten und dritten Niveau. Es folgt für die Dopplerverbreiterung:

$$\frac{1}{\lambda} = R_\infty\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) \Rightarrow \lambda = 656.11\,\mathrm{nm} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\frac{8\log 2\; kT}{mc^2}} = 2.256\cdot 10^{-5}$$
$$\Rightarrow \Delta\lambda = \sqrt{\frac{8\log 2\; kT}{mc^2}}\lambda = 1.48\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m} \ \Rightarrow \Delta f = \sqrt{\frac{8\log 2\; kT}{mc^2}}\frac{c}{\lambda} = 10.3\,\mathrm{GHz}$$

Die natürliche Linienbreite ergibt sich zu:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{4\pi c}\frac{1}{\tau} = 1.14\cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}, \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1.74\cdot 10^{-8}$$

Aufgabe 2

Schreibt man den ungestörten Hamiltonian als Summe zweier ungestörter Hamiltonians eines Wasserstoffatoms, so ergibt sich:

$$\langle \Phi_0^1\Phi_0^2 \left| H_0^1 + H_0^2 \right| \Phi_0^1\Phi_0^2\rangle = \langle \Phi_0^1\Phi_0^2 \left| E_0^1 + E_0^2 \right| \Phi_0^1\Phi_0^2\rangle = E_0^1 + E_0^2$$

Dabei ist $E_0 = 4E_0^H$, aufgrund von $Z = 2$. Somit folgt für die Grundzustandsenergie: $E_0^{He} = 8E_0^H$. Also dem achtfachen der Wasserstoffgrundzustandsenergie.

Störungsrechnung 1. Ordnung für den Grundzustand Bei Wasserstoff gilt: $\Phi_{100} = \sqrt{\frac{8}{\pi a^3}}\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$, dabei ist a der Bohrsche Radius.

$$E^1 = \langle \Phi_0^1\Phi_0^2 \left| H_{St} \right| \Phi_0^1\Phi_0^2\rangle = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\iint \mathrm{d}^3r_1\,\mathrm{d}^3r_2 \frac{1}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|}\Phi_{100}(\vec{r_1})^2\Phi_{100}(\vec{r_2})^2$$

Es gilt außerdem der Zusammenhang: $2aE_0^H = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$

$$E^1 = E_0^H \frac{128}{\pi^2 a^5}\iint \mathrm{d}^3r_1\,\mathrm{d}^3r_2 \frac{1}{|\vec{r_1} - \vec{r_2}|}\exp\left(-\tfrac{4}{a}\left(\vec{r_1} + \vec{r_2}\right)\right)$$

Lösung des Integrals, siehe Nolting: "Grundkurs Theoretische Physik 5/2" S.308, man erhält:

$$E^1 = \frac{5}{2} E_0^H \approx 34\,\mathrm{eV}$$

Somit erhält man als korrigierte Grundzustandsenergie: $E_0^{He'} = \frac{11}{2} E_0^H \approx 74.8\,\mathrm{eV}$