# Aufgabe 5

## Allgemeine Formeln

$$dU = \delta Q - \delta W,\ \ C_p = C_V + R,\ \ \delta W = p\,\mathrm{d}V,\ \ \kappa = \frac{C_p}{C_V}$$

$$\text{Isotherm: } dU = 0,\ \ Q = W = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V \stackrel{p=\frac{nRT}{V}}{=} \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\,\mathrm{d}V = nRT\log\frac{V_2}{V_1}$$

$$\text{Adiabatisch: } \delta Q = 0,\ \ dU = -\delta W, W = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V \stackrel{p=nRTV^{-1}}{=} nR\int_{V_1}^{V_2} \frac{T}{V}\,\mathrm{d}V \stackrel{TV^{\kappa-1}=const.}{=} -\frac{nR}{\kappa-1}\int_{T_1}^{T_2}\mathrm{d}T$$

$$\text{Isochor: } Q = nC_V\Delta T = dU,\ \ \delta W = 0, \text{da } \mathrm{d}V = 0$$

$$\text{Isobar: } Q = nC_p\Delta T,\ \ dU = nR\Delta T,\ \ \delta W = nR\Delta T = p\Delta V$$

$$\text{Entropie: } \mathrm{d}S = \frac{\delta Q_{Rev}}{T}$$

**a)**

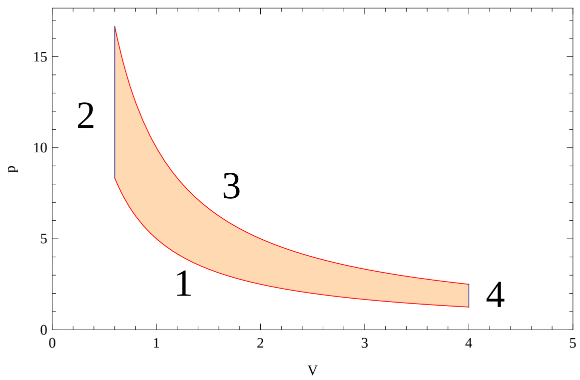


Abbildung 1: Stirling Prozess

**b)**

Berechne gesamte Arbeit: $W = \oint p\mathrm{dV} = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$

$$W = nRT_K\log\frac{V_2}{V_1} + 0 + nRT_H\log\frac{V_4}{V_3} + 0, \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$
$$= nR(T_H - T_K)\log\frac{V_1}{V_2}$$

Für $Q$ gilt: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = W_1 + nC_V(T_H - T_K) + W_3 + nC_V(T_K - T_H)$. Daraus folgt für den Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{W}{Q_3} = 1 - \frac{T_K}{T_H} = \eta_{Carnot}$$

**c)**

$$\Delta S = \oint dS = 0 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = nR\log\tfrac{V_2}{V_1} + nC_V\log\tfrac{T_H}{T_K} + nR\log\tfrac{V_4}{V_3} + nC_V\log\tfrac{T_K}{T_H} \stackrel{\frac{V_2}{V_1}=\frac{V_3}{V_4}}{=} 0$$

# Aufgabe 6

**a)**

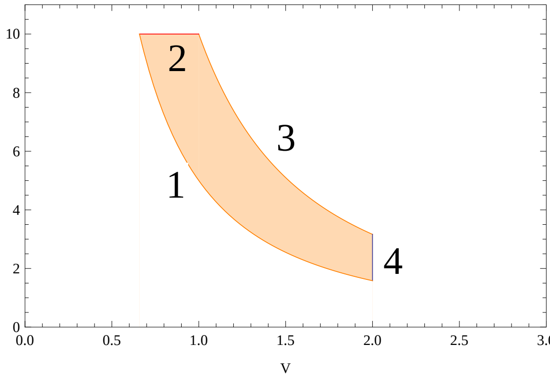


Abbildung 2: Diesel Prozess mit $\kappa = 1.66$

**b)**

Berechne gesamte Arbeit: $W = \oint p\mathrm{dV} = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$

$$\begin{aligned} W &= -nC_V(T_2 - T_1) + nR(T_3 - T_2) + -nC_V(T_4 - T_3) + 0, \\ &= -nC_V(T_2 - T_1) + nC_P(T_3 - T_2) - nC_V(T_3 - T_2) + -nC_V(T_4 - T_3) \\ &= nC_V(T_1 - T_4) + nC_P(T_3 - T_2) \end{aligned}$$

Für $Q$ gilt: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0 + nC_P(T_3 - T_2) + 0 + nC_V(T_1 - T_4)$. Daraus folgt für den Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{W}{Q_3} = \frac{nC_V(T_1 - T_4) + nC_P(T_3 - T_2)}{nC_P(T_3 - T_2)} = 1 + \frac{C_V(T_1 - T_4)}{(C_V + R)(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{1}{\kappa}\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

**c)**

Es gilt: $\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_3}\right)^{\kappa-1}$, $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}$, außerdem $\frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2}$ und $\frac{V_1}{V_4} = 1$ daraus folgt:

$$\frac{T_3}{T_4}\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_4}{V_3}\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\kappa-1} \to \frac{T_1}{T_4} = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\kappa} = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{C_p}{C_V}}$$

$\Delta S = \oint dS = 0 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 0 + nC_p \log\frac{T_3}{T_2} + 0 + nC_V \log\frac{T_1}{T_4} = 0$

## Aufgabe 7

**a)**

$dU = 4bVT^3\mathrm{d}T + bT^4\mathrm{d}V$, da $\delta Q = 0$ bei einer Adiabaten folgt:

$$\begin{aligned} -\delta W = -p\mathrm{d}V = -\frac{b}{3}T^4\mathrm{d}V &= \mathrm{d}U = 4bVT^3\mathrm{d}T + bT^4\mathrm{d}V \\ -\frac{1}{3}T\mathrm{d}V &= 4V\mathrm{d}T + T\mathrm{d}V \\ 0 &= 4V\mathrm{d}T + \frac{4}{3}T\mathrm{d}V \to \log\frac{T_2}{T_1} + \frac{1}{3}\log\frac{V_2}{V_1} \\ \frac{V_2}{V_1} &= \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^3 \end{aligned}$$

Dementsprechend folgt für die Temperaturänderung bei der Expansion:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

**b)**

$$\begin{aligned} dU &\overset{U \neq U(T)}{=} bT^4 \,\mathrm{d}V = -\delta W + \delta Q = -p \,\mathrm{d}V + \delta Q \\ bT^4 \,\mathrm{d}V &= -\frac{b}{3} T^4 \,\mathrm{d}V + \delta Q \\ \frac{4b}{3} T^4 \,\mathrm{d}V &= \delta Q \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Entropie:

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \mathrm{d}S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\delta Q_{Rev}}{T} = \frac{4b}{3} T^3 (V_2 - V_1)$$