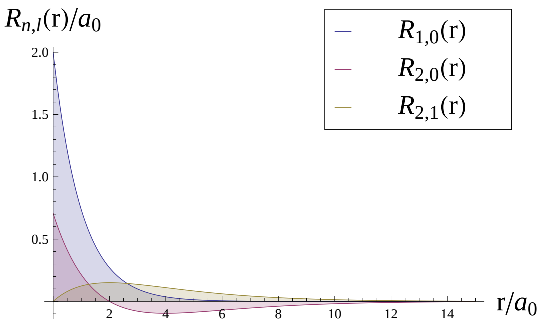
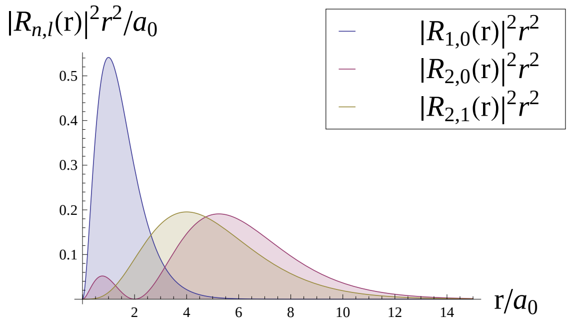
Aufgabe 1

b)





a)

Die zu betrachtenden Funktionen lauten:

$$R_{1,0}(r) = 2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-\frac{r}{a_0}) \qquad \rightarrow |R_{1,0}(r)|^2 r^2 = 4\left(\frac{1}{a_0}\right)^3 \exp(-\frac{2r}{a_0})r^2$$
$$R_{2,0}(r) = 2\left(\frac{1}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \exp(-\frac{r}{2a_0})(1-\frac{r}{2a_0}) \qquad \rightarrow |R_{2,0}(r)|^2 r^2 = 4\left(\frac{1}{2a_0}\right)^3 \exp(-\frac{r}{a_0})(1-\frac{r}{2a_0})^2 r^2$$
$$R_{2,1}(r) = \frac{1}{2\sqrt{6}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{5}{2}} \exp(-\frac{r}{2a_0})r \qquad \rightarrow |R_{2,1}(r)|^2 r^2 = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{a_0}\right)^5 \exp(-\frac{r}{a_0})r^4$$

Durch Ableiten der rechten Hälfte erhält man den Radius maximaler Aufenthaltswahrscheinlichkeit, durch Integration der linken Seite erhält man den Mittelwert. Beim Ableiten kann man jegliche Vorfaktoren vernachlässigen, sowie r durch $r' = r\frac{1}{a_0}$ substituieren.

$$< r >_{1,0} = \int_0^\infty R_{1,0}(r)^2 r^3 dr = \int_0^\infty 4\left(\frac{1}{a_0}\right)^3 \exp(-\frac{2r}{a_0})r^3 dr = \frac{3a}{2}$$
$$< r' >_{2,0} = \int_0^\infty R_{2,0}(r')^2 r'^3 dr' = \int_0^\infty 4\left(\frac{1}{2a_0}\right)^3 \exp(-\frac{r}{a_0})(1-\frac{r}{2a_0})^2 r^2 dr = 6a$$
$$< r' >_{2,1} = \int_0^\infty R_{2,1}(r')^2 r'^3 dr' = \int_0^\infty \frac{1}{24}\left(\frac{1}{a_0}\right)^5 \exp(-\frac{r}{a_0})r^5 dr = 5a$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r'}|R_{1,0}(r')|^2 r'^2 \overset{!}{=} 0 = -2\exp(-2r')(r'-1)r' \xrightarrow{r'\neq 0} r'_{max1,0} = 1$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r'}|R_{2,0}(r')|^2 r'^2 \overset{!}{=} 0 = -\exp(-r')r'(r'^3 - 8r'^2 + 16r' - 8) \longrightarrow r'_{max2,0} = 3+\sqrt{5}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r'}|R_{2,1}(r')|^2 r'^2 \overset{!}{=} 0 = -\exp(-r')r'^3(r'-4) \longrightarrow r'_{max2,1} = 4$$

Die Extrema bei $x = 0$ entfallen, da die Funktionen dort ein Minimum haben, die anderen Nullstellen der Ableitung lassen sich aufgrund von Kurvendiskussionen ausschließen.

	Mittelwert	Extremum
(1,0)	$\frac{3}{2}a_0$	a_0
(2,0)	$6a_0$	$\left(3+\sqrt{5}\right)a_0$
(2,1)	$5a_0$	$4a_0$

Unterschiede
Als erstes lässt sich feststellen, das Zustände mit höherer Energie ihren Mittelwert und ihr Maximum weiter außerhalb haben, dies ist analog zu Bohrs Überlegung, dass höher angeregte Elektronen größere Bahnen haben. Des weiteren lässt sich feststellen, dass der Mittelpunkt außerhalb (vom Kern aus gesehen) des Extremums liegt, was sich durch die erst im unendlichen auf 0 abfallende Radialfunktion erklärt.

Aufgabe 2

a)

Aufgrund der Ausdehnung des Protons ist die wirkende Kraft auf das Elektron innerhalb der gedachten Kugel geringer, dementsprechend sind in diesem Bereich Veränderungen zu erwarten und der Hamiltonian muss angepasst werden.
Ansatz für lineare Störungsrechnung: $\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 + \lambda \mathrm{H}'$. Ebenfalls bekannt: $\mathrm{H}_0 = \frac{\mathrm{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Des weiteren folgt für homogene, kugelförmige Ladungsverteilungen: Potential im inneren: $\frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}\frac{1}{2r_0}\left(3r_0^2 - r^2\right)$, Potential außerhalb der Kugel $\frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$, wobei r_0 der Kugelradius, in diesem Fall der Radius des Protons, ist. Daraus folgt für den Hamilton Operator:

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{p}^2}{2m} + \begin{cases} \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}, & r < r_0 \\ \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2r_0^3}\left(3r_0^2 - r^2\right), & r \geq r_0 \end{cases}$$

Hiermit ergibt sich im inneren der Kugel $\mathrm{H}' = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2r_0^3}\left(3r_0^2 - r^2\right) - \frac{1}{r}\right)$, sonst gilt: $\mathrm{H}' = 0$. Es ist der Grundzustand des Wasserstoffatoms zu betrachten, da jedoch nur der radiale Anteil beeinflusst wird, ist es ausreichend die Funktion $R_{1,0}(r) = 2\left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\exp(-\frac{r}{a_0})$ zu betrachten.
Somit folgt für die Energiekorrektur 1. Ordnung:

$$\begin{aligned}
E_n^1 =< \psi_n^0|\mathrm{H}'|\psi_n^0 >&= \int_0^{r_0}\left[4\left(\frac{1}{a_0}\right)^3\exp(-\frac{2r}{a_0})r^2\right]\left[\frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{2r_0^3}\left(3r_0^2 - r^2\right) - \frac{1}{r}\right)\right]dr \\
\exp(-\frac{2r}{a_0}) \approx 1, \text{da } r_0 \ll a_0 \quad &= 4\left(\frac{1}{a_0}\right)^3\frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{r_0}\left[r^2\right]\left[\left(\frac{1}{2r_0^3}\left(3r_0^2 - r^2\right) - \frac{1}{r}\right)\right]dr \\
&= 4\left(\frac{1}{a_0}\right)^3\frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{r_0^2}{10}\right] = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{5}\left[\frac{r_0^2}{a_0^3}\right] = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2a_0}\frac{4}{5}\left[\frac{r_0}{a_0}\right]^2, \; E_0 = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \\
&= -E_0\frac{4}{5}\left[\frac{r_0}{a_0}\right]^2 = 13{,}61\,\mathrm{eV}\,\frac{4}{5}\left[\frac{10^{-15}\mathrm{m}}{5{,}29\cdot 10^{-11}\mathrm{m}}\right]^2 = 3{,}89\cdot 10^{-9}\mathrm{eV}
\end{aligned}$$

Die Bindungsenergie verringert sich betragsmäßig geringfügig (Siehe auch b)).

b)

Betrachte selbes System wie bei a), jedoch verringert sich der Bohrsche Radius a_0 um das 207-fache aufgrund der Masse des Myons. Ich rechne hier ohne reduzierte Masse, da sich sonst das Proton und somit seine Ladungswolke nicht mehr in der "Mitte"befindet. Die Näherung bei a: $\exp(-\frac{2r}{a_0}) \approx 1$, da $r_0 \ll a_0$, behält jedoch ihre Gültigkeit. Es folgt für die Grundzustandsenergie ohne Korrektur:

$$E_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{207}{2a_0} = -2817\,\text{eV}$$

Es folgt für die Energiedifferenz:

$$E_n^1 = -E_0 \frac{4}{5} \left[\frac{207 r_0}{a_0} \right]^2 = 3{,}45 \cdot 10^{-2}\,\text{eV}$$

Damit ergibt sich für das Myon eine relative Energieänderung von $\Delta_\mu = \frac{E_n^1}{E_0} = 1{,}22 \cdot 10^{-5}$, verglichen zum Elektron $\Delta_e = 2{,}85 \cdot 10^{-10}$ ($207 \cdot 207$-fach größer).