Aufgabe 1

a)

Planksches Strahlungsgesetz:

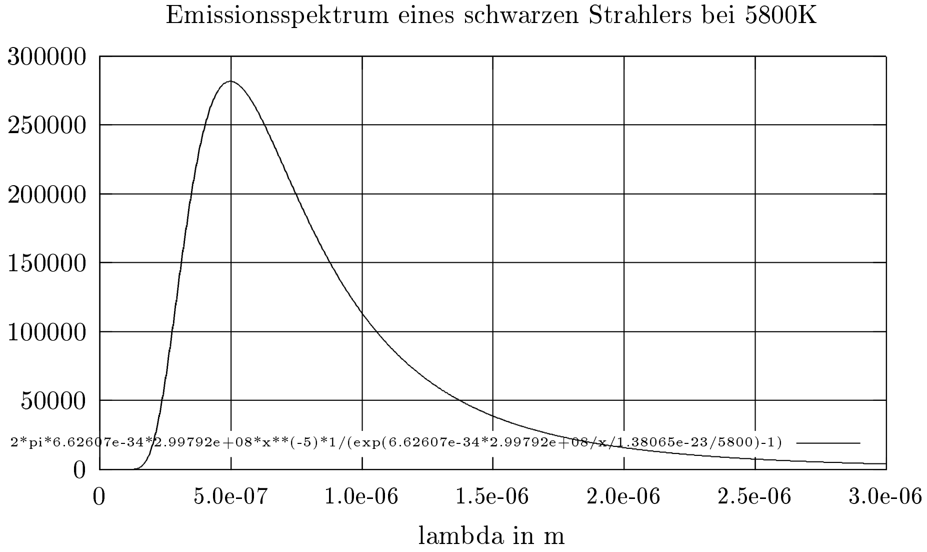
$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

Ableiten der Formel und Nullsetzen mit Substitution $\alpha := \frac{hc}{\lambda kT}$ ergibt

$$\frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}} = 5$$

Daraus folgt

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{\alpha kT} \approx 500nm; gruenesLicht$$



Warum erscheint die Sonne dennoch weiß?
Das Spektrum ist zu breit um signifikant im grünen Bereich stärker zu sein um es als grün zu identifizieren. Des weiteren spielen atmosphärische Effekte (z.B. Streuung hochfrequenter Anteile) sowie die 'Kennlinie' des Auges (wellenlängenabhängige Sensibilität). Dies führt dazu das man bei Farbtemperaturen nur von rot über weiß nach blau unterscheidet.

b)

Es gilt $\frac{1}{\lambda} = \nu = R_H \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right), R_H = 109677,5810cm^{-1}$
Man erhält, dass die komplette Balmer Serie ($n' = 2$) sowie die Paschen Serie ($n' = 3$) ab dem Übergang $8 \rightarrow 3$ Absorptionslinien im Wellenlängenbereich von 200nm bis 1000nm erzeugen.

c)

Die zu trennenden Wellenlängen liegen bei $955nm$ und $1005nm$, also braucht man bei $\lambda \approx 980nm$ eine Auflösung von $50nm$.
Das Auflösungsvermögen eines Prismenspektrometers ist $A := \frac{\partial n}{\partial \lambda} K = \frac{\lambda}{\delta \lambda}$
Durch einfaches Umstellen erhält man für die effektive Basisbreite $K = \frac{980}{50} \cdot 0.1cm = 1.96cm$

Tabelle 1: Wellenlängen in nm

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	unendlich
n'										
1		122	103	97	95	94	93	93	92	91
2			656	486	434	410	397	389	384	365
3				1876	1282	1094	1005	955	923	821
4					4052	2626	2166	1945	1818	1459

d)

Es gilt

$$R = R_\infty \frac{1}{1+\frac{m_0}{M}}, m_0..Elektronenmasse, M..Kernmasse, R_\infty = 10973731,8m^{-1}$$

Ferner gilt für die Massen mit Näherung:

$$m_e = 5,485 \cdot 10^{-4}u \approx \frac{1}{1836} m_P \tag{1}$$

$$m_N = 1,008u \approx m_P \tag{2}$$

$$m_P = 1,007u \tag{3}$$

Daraus folgt $\lambda = \left[R_\infty \frac{1}{1+\frac{m_0}{M}} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)\right]^{-1}$

$$\lambda_H = \left[R_\infty \frac{1}{1+\frac{m_0}{M}} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)\right]^{-1} = \left[R_\infty \frac{1}{1+\frac{1}{1836}} \left(\frac{3}{16}\right)\right]^{-1} = 486,14nm$$

$$\lambda_D = \left[R_\infty \frac{1}{1+\frac{m_0}{M}} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)\right]^{-1} = \left[R_\infty \frac{1}{1+\frac{1}{2\cdot 1836}} \left(\frac{3}{16}\right)\right]^{-1} = 486,00nm$$

Die Differenz beträgt demzufolge xnm, entsprechend obiger Formel muss die effektive Breite des Prismenspektrometers $K \geq \frac{cm}{1000} \cdot \frac{486}{0,14} \approx 3,47cm$ sein. Dies ist nicht erfüllt.

Aufgabe 2

a)

Es gilt $E_n = -\frac{Rhc}{n^2}, R = \frac{m_0 e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c}$ sowie $r_n = \frac{n^2\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{e^2 m_0}$. Aufgrund der Gleichheit von Coulomb-Kraft und Zentrifugalkraft gilt $m_0 v^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o r}$. Einsetzen liefert

$$v^2 = \frac{e^4}{16\pi^2\epsilon_0^2 n^2 \hbar^2} \rightarrow v = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar} = \frac{\alpha c}{n}$$

$$v_1 = \alpha c = 2,188 \cdot 10^6 \frac{m}{s} \tag{4}$$

$$v_2 = \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{2}\alpha c = 1,093 \cdot 10^6 \frac{m}{s} \tag{5}$$

b)

Aus der Vorlesung bekannt: $r_n = \frac{n^2\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{Ze^2 m_0}, Z = 6$.
Radius im Grundzustand beträgt:

$$r_1 = 8,82 \cdot 10^{-12}m$$

c)

Für $E_{n,Z}$ gilt: $E_{n,Z} = Z^2 \cdot E_{n,1}$, wobei $E_{n,1} = -\frac{e^4 m_0}{32pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^2}$ der Energieterm des Wasserstoffatoms ist. Durch $E = h\nu$ erhält man die entstehenden Wellenlängen mit Korrekturterm zu

$$\nu = \frac{Z^2 E_{1,1}}{h} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{m_0}{M}} \right) \tag{6}$$

$$\nu = 4^2 \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{9 \cdot 1836}} \right) \frac{E_{1,1}}{h} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \tag{7}$$

$$\nu \approx 15,999 \frac{E_{1,1}}{h} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \tag{8}$$

Man erkennt hier dass ähnliche Frequenzen zu erwarten sind bei $n'_H = 4 \cdot n'_{Be^+}$, selbiges gilt für n (ungestrichen). Daraus folgt für den $4 \leftarrow 8$ Übergang im Beryllium-Ion eine Frequenz von

$$\nu_{Be^+} = 4^2 \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{9 \cdot 1836}} \right) \frac{E_{1,1}}{h} \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{8^2} \right) = 2,46627 \cdot 10^{15} Hz$$

Für das Wasserstoffatom folgt (mit Korrekturterm)

$$\nu_H = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{1836}} \right) \frac{E_{1,1}}{h} \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 2,46509 \cdot 10^{15} Hz$$

Die Differenz liegt im Promillebereich: $\Delta\nu = 1,19 \cdot 10^{12} Hz$