Wahrscheinlichkeitstheorie
FSU Jena - WS 09/10
Serie 14 - Lösungen

Stilianos Louca

February 18, 2010

Aufgabe 01

(a) Mit

$$F_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{1_{(-\infty,t]}(X_k)}_{\text{iid}}$$

folgt nach dem SLLN

$$F_n^*(t) \xrightarrow[\text{f.s.}]{n\to\infty} \mathbb{E}1_{(-\infty,t]}(X_1) = \mathcal{P}(X_1 \leq t) = F(t)$$

(b) Nach dem CLT gehen

$$\sqrt{n}\,[F_n^*(t) - F(t)] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \left[1_{(-\infty,t]}(X_k) - F(t)\right] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \left[1_{(-\infty,t]}(X_k) - \mathbb{E}1_{(-\infty,t]}(X_k)\right]$$

$$\xrightarrow[\text{d}]{n\to\infty} \mathcal{N}_{0,\mathbb{V}1_{(-\infty,t]}(X_1)} = \mathcal{N}_{0,F(t)[1-F(t)]}$$

Aufgabe 02

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ lässt sich abschätzen

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\left(\|(X_n + Y_n) - (X+Y)\| > \varepsilon\right) &\leq \mathcal{P}\left(\|X_n - X\| + \|Y_n - Y\| > \varepsilon\right) \\
&\leq \mathcal{P}\left(\left\{\|X_n - X\| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\|Y_n - Y\| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \\
&\leq \underbrace{\mathcal{P}\left(\|X_n - X\| > \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} + \underbrace{\mathcal{P}\left(\|Y_n - Y\| > \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

sprich

$$(X_n + Y_n) \xrightarrow[\mathcal{P}]{n\to\infty} (X+Y)$$

Aufgabe 03

(a) Aus der Darstellung

$$\mathcal{B}_{n,\lambda/n} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\tfrac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \tfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \delta_k$$

ergibt sich direkt die charakteristische Funktion

$$\hat{\mathcal{B}}_{n,\lambda/n}(t) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\tfrac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \tfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k} e^{itk} = \left[1 + \tfrac{\lambda}{n}\left(e^{it} - 1\right)\right]^n$$

(b) Offensichtlich geht für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$\hat{\mathcal{B}}_{n,\lambda/n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right]$$

(c) Bekanntlich ist die charakteristische Funktion $\hat{\pi}_\lambda$ der Poissonverteilung π_λ mit Parameter λ gegeben durch

$$\hat{\pi}_\lambda(t) = \exp\left[\lambda(e^{it} - 1)\right]$$

Nach Lévy konvergieren also die $\mathcal{B}_{n,\lambda/n}$ schwach gegen π_λ.

Aufgabe 04

(a) Die Ereignisse $\{U_n \leq \alpha_n\}$ sind unabhängig. Nach Borel & Cantelli folgt daher die Äquivalenz

$$\mathcal{P}\left(U_n \leq \alpha_n \text{ u.o.}\right) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(U_n \leq \alpha_n) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$$

(b) Obige Äquivalenz gilt natürlich auch für echte Ungleichheitszeichen "$<$". Wegen

$$\{U_n \geq \alpha_n \text{ s.i}\} = \{U_n < \alpha_n \text{ u.o.}\}^c$$

gilt die Äquivalenz

$$1 = \mathcal{P}\left(U_n \geq \alpha_n \text{ s.i.}\right) = 1 - \mathcal{P}\left(U_n < \alpha_n \text{ u.o.}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

Aufgabe 05

(a) Aus

$$\widetilde{S}_n = \sum_{\substack{j=1 \\ X_j \neq 6}}^{n} X_j = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} X_j}_{S_n} - 6 \cdot \#\{1 \leq j \leq n : X_j = 6\}$$

wird ersichtlich

$$\frac{\widetilde{S}_n}{n} = \underbrace{\frac{S_n}{n}}_{\substack{\overset{n\to\infty}{\underset{\text{f.s.}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}X_1 \\ \text{nach SLLN}}} - 6 \underbrace{\frac{\#}{n}\{1 \leq j \leq n : X_j = 6\}}_{\substack{\overset{n\to\infty}{\underset{\text{f.s.}}{\longrightarrow}} \mathcal{P}(X_1=6) \\ \text{nach (01)}}} \overset{n\to\infty}{\underset{\text{f.s.}}{\longrightarrow}} \mathbb{E}X_1 - 6 \cdot \mathcal{P}(X_1 = 6) = \frac{5}{2}$$

(b) Die $\widetilde{S}_n/n$ konvergieren fast-sicher, und damit auch in Wahrscheinlichkeit bzw. in Verteilung.

Aufgabe 06

Bekanntlich gehen

$$\frac{1}{\sqrt{n\mathbb{V}X_1}} \sum_{k=1}^{n} X_k \overset{n\to\infty}{\underset{\text{d}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}_{0,1}$$

Insbesondere[1]

$$\mathcal{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \geq 0\right) = \mathcal{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n\mathbb{V}X_1}} \sum_{k=1}^{n} X_k \geq 0\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}_{0,1}([0,\infty)) = \frac{1}{2}$$

[1] Beachte dass die alternative Definition $F(t) := \mathcal{P}(X \geq t)$ einer *umgedrehten* Verteilungsfunktion nichts daran ändert, dass Verteilungsfunktionen schwach konvergierender ZG punktweise gegen die entsprechende VF der Grenz-ZG konvergieren.