Stochastik II (Wahrscheinlichkeitstheorie) 2009/10

14. Serie

1. Gegeben sei eine beliebige Folge $X_1, X_2, \dots$ unabhängiger identisch verteilter zufälliger Größen mit Verteilungsfunktion $F(t) = \mathbb{P}(X_1 \le t)$, $t \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ bildet man nun die (zufällige) n–te empirische Verteilungsfunktion F_n^* durch

$$F_n^*(t,\omega) := \frac{1}{n} \#\{k \le n : X_k(\omega) \le t\} .$$

   (a) Zeigen Sie, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ fast sicher $\lim_{n\to\infty} F_n^*(t) = F(t)$ gilt.

   (b) Man weise außerdem nach, dass für $t \in \mathbb{R}$ stets $\sqrt{n}\,[F_n^*(t) - F(t)]$ in Verteilung gegen eine $\mathcal{N}(0, F(t)(1-F(t)))$–verteilte zufällige Größe konvergiert. Die (zufällige) Abbildung $t \mapsto \sqrt{n}\,[F_n^*(t) - F(t)]$ nennt man den von F erzeugten empirischen Prozess n–ter Ordnung.

2. Gegeben seien zufällige Größen X_n, X und Y_n, Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \quad \text{und} \quad Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y .$$

   Zeigen Sie, dass dann auch

$$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y$$

   gilt.

3. Für ein $\lambda > 0$ sei $\mathbb{P}_n = B_{n,\lambda/n}$ (Binomialverteilung).

   (a) Berechnen Sie $\widehat{\mathbb{P}}_n$.

   (b) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \widehat{\mathbb{P}}_n(t)$ für $t \in \mathbb{R}$.

   (c) Welche Aussage über die schwache Konvergenz der $\mathbb{P}_n$ kann man daraus ableiten ?

4. Gegeben seien unabhängige zufällige Größen $U_1, U_2, \dots$, die gleichverteilt auf $[0,1]$ sind.

   (a) Charakterisieren Sie Folgen $(\alpha_n)_{n\ge 1}$ mit $0 \le \alpha_n \le 1$, für die $\mathbb{P}(U_n \le \alpha_n \text{ u.o}) < 1$ gilt. Begründen Sie Ihre Aussage.

   (b) Für welche Folgen $(\alpha_n)_{n\ge 1}$ hat man $\mathbb{P}(U_n \ge \alpha_n \text{ s.i.}) = 1$?

5. Man würfele beliebig oft mit einem fairen Würfel und bezeichne mit $X_1, X_2, \dots$ die Ergebnisse im ersten, zweiten, usw. Wurf. Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man dann

$$\tilde{S}_n := \sum_{\substack{j=1 \\ X_j \ne 6}}^{n} X_j .$$

   (a) Welchen Grenzwert besitzt $\tilde{S}_n/n$?

   (b) Welcher Art ist die Konvergenz von $\tilde{S}_n/n$?

   Begründen Sie Ihre Antworten.

6. Gegeben sei eine Folge unabhängiger, identisch verteilter zufälliger Größen $X_1, X_2, \dots$, für die $\mathbb{E}|X_1|^2 < \infty$ und $\mathbb{E}X_1 = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n} X_j \ge 0\right) = \frac{1}{2}$$

   folgt.

Besprechung in der Übung am 09. 02. 10

Anmerkung: Die Aufgaben 2. bis 6. stammen aus einer früheren Klausur.