Wahrscheinlichkeitstheorie
FSU Jena - WS 09/10
Serie 13 - Lösungen

Stilianos Louca

February 2, 2010

Aufgabe 01

(a) Die Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen

$$\mathcal{P}_n := \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cdot \delta_0 + \frac{\delta_n}{\sqrt{n}}$$

auf $\mathbb{R}$ geht schwach gegen δ_0, denn

$$\hat{\mathcal{P}}_n(t) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{e^{itn}}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 = \hat{\delta}_0(t) \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

Jedoch gilt

$$\mathbb{E}\mathcal{P}_n = \sqrt{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \neq \mathbb{E}\delta_0$$

(b) Definiert seien die stetigen, beschränkten Abbildungen

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f_k(t) := \begin{cases} |t| & : |t| \leq k \\ k & : |t| \geq k \end{cases} \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

Da $f_k \nearrow |\cdot|$ gilt nach dem Satz über monotone Konvergenz

$$\mathbb{E}\,|Y| = \int_{\mathbb{R}} |t| \ d\mathcal{P}_Y(t) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \ d\mathcal{P}_Y(t) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}f_k(Y)$$

Fall: $\mathbb{E}\,|Y| < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann lässt sich für genügend großes k abschätzen

$$\mathbb{E}\,|Y| \leq \mathbb{E}f_k(Y) + \varepsilon \overset{f_k \in \mathcal{C}_b}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}f_k(Y_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} \ \mathbb{E}\,|Y_n| + \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt die Behauptung.

Fall: $\mathbb{E}\,|Y| = \infty$. Dann existiert für jedes $R \in \mathbb{N}$ ein genügend großes k mit

$$R \leq \mathbb{E}f_k(Y) \overset{f_k \in \mathcal{C}_n}{=} \lim_{n\to\infty} f_k(Y_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} \ \mathbb{E}\,|Y_n|$$

Da R beliebig war, folgt die Behauptung.

(c) Sei (Y_n) gleichgradig integrierbar. Dann ist

$$\sup_n \mathbb{E}\,|Y|_n \overset{\forall\ k\in\mathbb{N}}{\leq} \underbrace{\sup_n \int_{|t|\leq k} |t| \ d\mathcal{P}_{Y_n}}_{\leq |k|} + \underbrace{\sup_n \int_{|t|\geq k} |t| \ d\mathcal{P}_{Y_n}}_{\substack{\leq 1 \\ \text{für irgendein } k\in\mathbb{N}}} < \infty$$

und nach (b) auch $\mathbb{E}|Y| < \infty$. Insbesondere wird die Funktionenfolge $|\mathrm{Id}| \cdot 1_{\{|\mathrm{Id}| \geq k\}}$, $k \in \mathbb{N}$ majorisiert durch die $\mathcal{P}_Y$-integrable $|\mathrm{Id}|$ so dass nach Lebesgue gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int \underbrace{|t| \cdot 1_{\{|\mathrm{Id}|\geq k\}}(t)}_{\substack{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \text{punkweise}}} \; d\mathcal{P}_Y = 0 \tag{0.1}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$, dann existiert nach Voraussetzung bzw. Gl. (0.1) ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\int\limits_{|t|\geq k_0} |t| \;\; d\mathcal{P}_{Y_n} \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{0.2}$$

und

$$\int\limits_{|t|\geq k_0} |t| \;\; d\mathcal{P}_Y \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{0.3}$$

Definieren nun die Folge beschränkter, stetiger Funktionen

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f_k(t) := \begin{cases} t & : |t| \leq k \\ k & : t \geq k \\ -k & : t \leq -k \end{cases} \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

so dass gilt

$$\int f_k \; d\mathcal{P}_{Y_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f_k \; d\mathcal{P}_Y \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}Y_n - \mathbb{E}Y| \leq & \left| \int f_{k_0} \; d\mathcal{P}_{Y_n} - \int f_{k_0} \; d\mathcal{P}_Y \right| \\
& + \left| \int\limits_{t>k_0} (t-k_0) \; d\mathcal{P}_{Y_n} + \int\limits_{t<-k_0} (t+k_0) \; d\mathcal{P}_{Y_n} \right| + \left| \int\limits_{t>k_0} (t-k_0) \; d\mathcal{P}_Y + \int\limits_{t<-k_0} (t+k_0) \; d\mathcal{P}_Y \right| \\
& \leq \left| \int f_{k_0} \; d\mathcal{P}_{Y_n} - \int f_{k_0} \; d\mathcal{P}_Y \right| + \int\limits_{|t|\geq k_0} |t| \;\; d\mathcal{P}_{Y_n} + \int\limits_{|t|\geq k_0} |t| \;\; d\mathcal{P}_Y \\
& \overset{(0.2)\&(0.3)}{\leq} \underbrace{\left| \int f_{k_0} \; d\mathcal{P}_{Y_n} - \int f_{k_0} \; d\mathcal{P}_Y \right|}_{\substack{\leq \frac{\varepsilon}{2} \;\; \forall\, n \geq n_0 \\ \text{für irgendein } n_0 \in \mathbb{N}}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Bemerkung: Obige Aussage impliziert auch umgekehrt den Satz von Lebesgue. Sind nämlich $f_n \underset{\text{f.s.}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} f$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathcal{P})$ und $|f_n| \leq g \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$ für irgendeine integrable $g : \Omega \to \mathbb{R}$, so gehen insbesondere auch $f_n \underset{\text{d}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} f$ als Zufallsvariablen. Anderseits lässt sich abschätzen

$$\sup_n \mathbb{E}|f_n| 1_{\{|f_n|\geq a\}} = \sup_n \int\limits_{\{|f_n|\geq a\}} \underbrace{|f_n|}_{\leq g} \; d\mathcal{P} \leq \sup_n \int\limits_{\{|f_n|\geq a\}} g \, d\mathcal{P} \leq \int\limits_{\{|g|\geq a\}} g \, d\mathcal{P} = \int \underbrace{g \cdot 1_{\{|g|\geq a\}}}_{\substack{\underset{\text{f.s.}}{\overset{a\to\infty}{\longrightarrow}} 0 \\ \text{da } g \text{ f.ü. endlich}}} \; d\mathcal{P} \underset{\substack{\text{monotone} \\ \text{Konvergenz}}}{\overset{a\to\infty}{\longrightarrow}} 0$$

sprich die (f_n) sind gleichgradig integrierbar, was $\mathbb{E}f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}f$ impliziert.

(d) Es sei

$$S := \sup_n \mathbb{E}\,|Y_n|^{1+\varepsilon} < \infty$$

und $\delta > 0$ beliebig. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ so dass

$$|t|^{1+\varepsilon} \geq \frac{S}{\delta} \cdot |t| \quad \forall\ |t| \geq k$$

Folglich lässt sich abschätzen

$$\int\limits_{\{|t|\geq k\}} |t|\ d\mathcal{P}_{Y_n} \leq \frac{\delta}{S} \int\limits_{\{|t|\geq k\}} |t|^{1+\varepsilon}\ d\mathcal{P}_{Y_n} \leq \frac{\delta}{S} \underbrace{\int |t|^{1+\varepsilon}\ d\mathcal{P}_{Y_n}}_{\leq S} \leq \delta \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

(e) Nach dem CLT gehen

$$\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[\mathrm{d}]{n\to\infty} Z \sim \mathcal{N}_{0,1}$$

Da die Abbildung $x \mapsto |x|^p$ stetig ist, gehen auch

$$\left|\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}\right|^p \xrightarrow[\mathrm{d}]{n\to\infty} |Z|^p$$

Wegen

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left|\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}\right|^2 = \sup_n \frac{\mathbb{V}S_n}{n\sigma^2} = 1 < \infty$$

sind

$$\left|\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}\right|^p$$

nach (d) gleichgradig integrierbar ($\varepsilon > 0$ so dass $p(1+\varepsilon) = 2$). Nach (c) gehen also

$$\mathbb{E}\left|\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}\right|^p \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}\,|Z|^p$$

Anderseits ist

$$\mathbb{E}\,|Z|^p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^p\, e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\infty} x^p e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \overset{x^2=:2y}{=} \frac{2^{p/2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} y^{\frac{p}{2}-\frac{1}{2}} e^{-y}\ dy = \frac{2^{p/2}}{\Gamma(1/2)} \cdot \Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

(f)

$$\mathbb{E}\left|\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathcal{P}\left(|S_n - n| = k\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \left[\mathcal{P}\left(S_n = n+k\right) + \mathcal{P}\left(S_n = n-k\right)\right]$$

$$\overset{\substack{\text{Hilfsaussage}\\(0.0.1)}}{=} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{kn^{n+k}}{(n+k)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{kn^{n-k}}{(n-k)!}\right] = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \left[\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(k-n)n^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)n^k}{k!}\right]$$

$$= \frac{ne^{-n}}{\sqrt{n}} \left[\sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{n^k}{k!} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!}\right] = \frac{ne^{-n}}{\sqrt{n}} \left[\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{n^n}{n!}\right] = 2\sqrt{n} \cdot \frac{n^n}{n!} \cdot e^{-n}$$

(g) Nach (e) & (f) gilt

$$\lim_{n\to\infty} 2\sqrt{n} \cdot \frac{n^n}{n!} \cdot e^{-n} \overset{p:=1}{=} \sqrt{2}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1/2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

was genau zu zeigen war.

0.0.1 Hilfsaussage über die Poissonverteilung

Sind $X_1, X_2, ..$ unabhängig, poissonverteilt mit Parametern $\lambda_1, \lambda_2, ..$ und $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$, so gilt

$$\mathcal{P}(S_n = m) = \frac{1}{m!}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)^m \cdot \exp\left[-\sum_{k=1}^n \lambda_k\right] \quad , \quad m \in \mathbb{N}_0$$

Insbesondere sind S_n poissonverteilt mit Parameter $\sum_{k=1}^n \lambda_k$.

Beweis durch Induktion über n: Der Fall $n = 1$ ist klar. Gilt die Aussage nun für irgendein $n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$\mathcal{P}(S_{n+1} = m) = \sum_{l=0}^m \mathcal{P}\left(S_n = l; X_{n+1} = m - l\right) \overset{\text{unabh.}}{=} \sum_{l=0}^m \mathcal{P}\left(S_n = l\right) \cdot \mathcal{P}\left(X_{n+1} = m - l\right)$$

$$\overset{\text{Vor.}}{=} \sum_{l=0}^m \frac{1}{l!}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)^l \cdot \exp\left[-\sum_{k=1}^n \lambda_k\right] \cdot \frac{\lambda_{n+1}^{m-l}}{(m-l)!} e^{-\lambda_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{m!} \exp\left[-\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k\right] \cdot \sum_{l=1}^m \binom{m}{j} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)^l \cdot \lambda_{n+1}^{m-l} = \frac{1}{m!} \exp\left[-\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k\right] \cdot \left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k\right)^m$$

□

Aufgabe 02

Betrachten die unabhängigen, standardnormalverteilten $\xi_1, \xi_2, ... \sim \mathcal{N}_{0,1}$, dazu die Summen

$$S_n := \sum_{k=1}^{2n} \xi_k^2 \ \sim \chi_{2n}^2$$

Dann erfüllen die S_n das CLT, sprich

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{V}S_n}} = \frac{S_n - 2n}{\sqrt{4n}} \underset{\text{d}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \mathcal{N}_{0,1}$$

Daher konvergieren auch die Verteilungsfunktionen von S_n gegen die VF Φ von $\mathcal{N}_{0,1}$. Insbesondere

$$\frac{1}{2} = \Phi(0) \overset{n\to\infty}{\longleftarrow} \mathcal{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{\mathbb{V}S_n}} \leq 0\right) = \mathcal{P}(S_n \leq 2n) \overset{S_n \sim \chi_{2n}^2}{=} \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{2n} \frac{x^{n-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^n} \ dx \overset{x=:2u}{=} \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^n u^{n-1} e^{-x} \ du$$

Aufgabe 03

Richtung "⇒": Da jede Menge $\{k\} \subseteq (\mathbb{N}, |\cdot|)$ sowohl abgeschlossen als auch offen ist, gilt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \ \mathcal{P}_n(\{k\}) \leq \mathcal{P}(\{k\}) \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \ \mathcal{P}_n(\{k\})$$

woraus die Behauptung folgt.

Richtung "⇐": Nach Fatou folgt für jede (insbesondere offene) Menge $A \subseteq \mathbb{N}$

$$\mathcal{P}(A) = \sum_{a\in A} \mathcal{P}(\{a\}) = \sum_{a\in A} \underline{\lim_{n\to\infty}} \ \mathcal{P}_n(\{a\}) \overset{\text{Fatou}}{\leq} \underline{\lim_{n\to\infty}} \ \sum_{a\in A} \mathcal{P}_n(\{a\}) = \underline{\lim_{n\to\infty}} \ \mathcal{P}_n(A)$$

woraus die schwache Konvergenz folgt.
□