Stochastik II (Wahrscheinlichkeitstheorie) 2009/10

13. Serie

1. (a) Gegeben sei eine Folge (Y_n) von zufälligen Größen mit $\mathbb{E}\,|Y_n| < \infty$ und $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$. Zeigen Sie, dass dann i.A. nicht $\mathbb{E}\,Y_n \to \mathbb{E}\,Y$ folgt.

   (b) Unter den obigen Voraussetzungen hat man aber $\mathbb{E}\,|Y| \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\,|Y_n|$. Insbesondere folgt $\mathbb{E}\,|Y| < \infty$ sofern $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\,|Y_n| < \infty$.

   Hinweis: Man approximiere die stetige unbeschränkte Funktion $x \to |x|$ geeignet durch beschränkte stetige Funktionen.

   (c) Die Folge (Y_n) heißt gleichgradig integrierbar, sofern

   $$\lim_{a\to\infty} \sup_n \mathbb{E}\,|Y_n|\,\mathbb{1}_{\{|Y_n|\ge a\}} = 0$$

   gilt. Zeigen Sie, dass für eine gleichgradig integrierbare Folge (Y_n) aus $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$ stets $\mathbb{E}\,Y_n \to \mathbb{E}\,Y$ folgt.

   $(*)$ Wieso erhält man hieraus den Konvergenzsatz von Lebesgue ?

   (d) Hat man für ein $\varepsilon > 0$ die Aussage $\sup_n \mathbb{E}\,|Y_n|^{1+\varepsilon} < \infty$, so ist (Y_n) notwendigerweise gleichgradig integrierbar. Beweisen Sie dies.

   (e) Gegeben sei eine Folge $X_1, X_2, \ldots$ von i.i.d. zufälligen Größen mit $\sigma^2 := \mathbb{V}(X_1)$ und mit $a := \mathbb{E}\,X_1$. Zeigen Sie, dass für $0 < p < 2$ die Aussage

   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left|\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}\right|^p = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p e^{-x^2/2}\,dx = 2^{p/2}\frac{\Gamma((p+1)/2)}{\Gamma(1/2)}$$

   mit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ gilt.

   (f) Im Fall von Poissonverteilten (mit Parameter $\lambda = 1$) unabhängigen zufälligen Größen $X_1, X_2, \ldots$, d.h. man hat $\mathbb{P}(X_j = k) = e^{-1}/k!$, berechne man $\mathbb{E}\left|\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right|$.

   (g) Unter Verwendung von e) und f) beweise man

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\,e^{-n}n^n}{n!} = 1 \quad \text{(Stirlingsche Formel)} .$$

2. Man berechne

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^n x^{n-1} e^{-x}\,dx .$$

   Hinweis: Man verwende den ZGS für χ^2_{2n}.

3. Gegeben seien Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_n$ und $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Zeigen Sie, dass dann und nur dann $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$ gilt, wenn die Aussage

   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_n(\{k\}) = \mathbb{P}(\{k\})$$

   für alle $k \in \mathbb{N}$ richtig ist.

Abgabe: 02. 02. 10