Wahrscheinlichkeitstheorie
FSU Jena - WS 09/10
Serie 12 - Lösungen

Stilianos Louca

January 26, 2010

Aufgabe 01

Vorbetrachtung

Sei zunächst (E, d) allgemeiner metrischer Raum. Zu $\varepsilon > 0$ und $A \subseteq E$ setze

$$A^{\overline{\varepsilon}} := \bigcup_{x \in A} B_\varepsilon(x)$$

Dann:

(i) Für $\varepsilon, \delta > 0$ und $A \subseteq E$ gilt: $(A^{\overline{\varepsilon}})^{\overline{\delta}} \subseteq A^{\overline{\varepsilon+\delta}}$.
Beweis: Ist $x \in (A^{\overline{\varepsilon}})^{\overline{\delta}}$, sprich $x \in B_\delta(y)$ für irgendein $y \in A^{\overline{\varepsilon}}$, so ist auch $y \in B_\varepsilon(z)$ für irgendein $z \in A$. Doch dies impliziert $x \in B_{\varepsilon+\delta}(z)$, sprich $x \in A^{\varepsilon+\delta}$.

(ii) Sind $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\searrow} 0$, so gehen $A^{\overline{\varepsilon_n}} \searrow \overline{A}$.
Beweis: Offensichtlich sind $A^{\overline{\varepsilon_n}}$ monoton fallend. Ist nun $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A^{\overline{\varepsilon_n}}$, so existiert per Konstruktion eine Folge $y_n \in A$ mit $d(x, y_n) \leq \varepsilon_n$, sprich $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Daher $x \in \overline{A}$.

Beweis der Metrik

Sei $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

- Tatsächlich ist λ wohldefiniert, da natürlich $F(x-1) - 1 \leq 0 \leq G(x) \leq 1 \leq F(x+1) + 1$. Insbesondere ist $\lambda \leq 1$.
- Symmetrie von $\lambda : \mathfrak{M}_1(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_1(\mathbb{R}) \to [0, \infty)$ ist klar.
- Ist $\lambda(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 0$, so existiert Folge $\varepsilon_n \searrow 0$ mit

  $$\mathcal{P}((-\infty, x]) \leq \mathcal{Q}((-\infty, x + \varepsilon_n]) + \varepsilon_n \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

  (analog auch $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ vertauscht), sprich

  $$\mathcal{P}((-\infty, x]) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}((-\infty, x]) \leq \lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}(\underbrace{(-\infty, x + \varepsilon_n]}_{\searrow(-\infty,x]}) + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n}_{0} = \mathcal{Q}((-\infty, x])$$

  (analog auch $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ vertauscht). Daher

  $$\mathcal{Q}((-\infty, x]) = \mathcal{P}((-\infty, x]) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

  was bekanntlich $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$ impliziert.

- Dreiecksungleichung: Zu $\mathcal{P},\mathcal{Q},\mathcal{R}\in\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ existieren $\varepsilon_n\searrow\lambda(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ und $\delta_n\searrow\lambda(\mathcal{Q},\mathcal{R})$ für die gilt
$$\mathcal{P}((-\infty,x])\leq\mathcal{Q}((-\infty,x+\varepsilon_n])+\varepsilon_n\quad\forall\ x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$$
$$\mathcal{Q}((-\infty,x])\leq\mathcal{R}((-\infty,x+\delta_n])+\delta_n\quad\forall\ x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$$
Insbesondere
$$\mathcal{P}((-\infty,x])\leq\mathcal{Q}((-\infty,x+\varepsilon_n])+\varepsilon_n\leq\mathcal{R}((-\infty,x+\varepsilon_n+\delta_n])+\varepsilon_n+\delta_n\quad\forall\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$$
sprich $(\varepsilon_n+\delta_n)\geq\lambda(\mathcal{P},\mathcal{R})\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$, daher
$$\lambda(\mathcal{P},\mathcal{Q})+\lambda(\mathcal{Q},\mathcal{R})=\lim_{n\to\infty}(\varepsilon_n+\delta_n)\geq\lambda(\mathcal{P},\mathcal{R})$$

Beweis der Äquivalenz der Topologien: Richtung "⇒"

Beweis durch Widerspruch: Es gehen $\mathcal{P}_n\overset{n\to\infty}{\underset{\text{weak}}{\longrightarrow}}\mathcal{P}$. Nehmen an $\lambda(\mathcal{P}_n,\mathcal{P})\overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow}0$, dann existiert $\delta>0$ und Teilfolge $(\mathcal{P}_{n_k})_{k=1}^\infty$ mit $\lambda(\mathcal{P}_{n_k},\mathcal{P})>2\delta$, sprich
$$\mathcal{P}_{n_k}(I_k)>\mathcal{P}((-\infty,x_k+2\delta])+2\delta\quad\vee\quad\mathcal{P}((-\infty,x_k-2\delta])-2\delta>\mathcal{P}_{n_k}(I_k)$$
für irgendwelche Intervalle $I_k=(-\infty,x_k]$. Der zweite (rechte) Fall würde jedoch wiederum bedeuten
$$\mathcal{P}_{n_k}([x_k,\infty))\geq\mathcal{P}_{n_k}((x_k,\infty))=\mathcal{P}_{n_k}(I_k^c)>\mathcal{P}((x_k-2\delta,\infty))+2\delta\geq\mathcal{P}([x_k-\delta,\infty))+\delta$$
Fazit, es existieren Intervalle I_k der Form $(-\infty,x_k]$ oder $[x_k,\infty)$ und
$$\mathcal{P}_{n_k}(I_k)>\mathcal{P}(\overline{I_k^{\delta}})+\delta\quad\forall\ k\in\mathbb{N}\tag{0.1}$$
Weiterhin können wir o.B.d.A. annehmen dass alle Intervalle I_k vom gleichen Typ (links-unbeschränkt oder rechts-unbeschränkt) sind[1].

Da $(x_k)_{k=1}^\infty$ auf jeden Fall eine monotone Teilfolge besitzt, können wir o.B.d.A. annehmen, dass (x_k) wächst oder fällt, sprich $I_k\searrow I$ oder $I_k\nearrow I$ für geeignetes Intervall I (bzw. $I\in\{\emptyset,\mathbb{R}\}$).

- **Fall $I_k\searrow I$:** Da die I_k abgeschlossen sind, ist auch I abgeschlossen und es gilt
$$\mathcal{P}(I)+\delta\overset{I_k\searrow I}{=}\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \mathcal{P}(I_k)+\delta\overset{(0.1)}{<}\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \underbrace{\mathcal{P}_{n_k}(I_k)}_{\substack{\leq\mathcal{P}_{n_k}(I_m)\\ \forall\ k\geq m}}\overset{\forall\ m}{\leq}\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \mathcal{P}_{n_k}(I_m)\overset{\mathcal{P}_n\overset{n\to\infty}{\underset{w}{\longrightarrow}}\mathcal{P}}{\leq}\mathcal{P}(I_m)\quad\forall\ m\in\mathbb{N}$$
Doch dies ist ein Widerspruch zu $I_m\searrow I$.
- **Fall $I_k\nearrow I$:** Können o.B.d.A. annehmen dass I_k offen sind[2]. Dann ist auch I offen und
$$\mathcal{P}(\overline{I})\overset{\mathcal{P}_n\overset{n\to\infty}{\underset{w}{\longrightarrow}}}{\geq}\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \mathcal{P}_{n_k}(\overline{I})\overset{\overline{I}\supseteq\overline{I}_k}{\geq}\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \mathcal{P}_{n_k}(\overline{I}_k)\overset{(0.1)}{\geq}\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \mathcal{P}(\overline{I_k^{\delta}})+\delta\overset{I_k\nearrow I}{\geq}\mathcal{P}(\overline{I})+\delta$$
ein Widerspruch!

Beweis der Äquivalenz der Topologien: Richtung "⇐"

Es sei $\lim_{n\to\infty}\lambda(\mathcal{P}_n,\mathcal{P})=0$, dann existieren[3] $\varepsilon_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ mit
$$\mathcal{P}((-\infty,x-\varepsilon_n])-\varepsilon_n\leq\mathcal{P}_n((-\infty,x])\leq\mathcal{P}((-\infty,x+\varepsilon_n])+\varepsilon_n\quad\forall\ x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}\tag{0.2}$$

[1] Da jedes I_k nur eines der beiden Typen sein kann, existiert stets Teilfolge $(I_{k_i})_{i=1}^\infty$ die die Forderung erfüllt.
[2] Da $\partial I_k\subseteq D$ gilt (0.1) auch für das Innere I_k^o und I_k^o sind weiterhin wachsend.
[3] Zu $n\in\mathbb{N}$ existiert per Konstruktion ein $\varepsilon_n\leq\lambda(\mathcal{P}_n,\mathcal{P})+\frac{1}{n}$ mit der genannten Eigenschaft (0.2). Doch diese erfüllen $\varepsilon_n\to 0$.

Insbesondere

$$\mathcal{P}((-\infty,x)) = \lim_{n\to\infty}\mathcal{P}((-\infty,x-\varepsilon_n]) - \underbrace{\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n}_{0} \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\ \mathcal{P}_n((-\infty,x])$$

$$\leq \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \mathcal{P}_n((-\infty,x]) \leq \lim_{n\to\infty}\mathcal{P}((-\infty,x+\varepsilon_n]) + \underbrace{\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n}_{0} = \mathcal{P}((-\infty,x]) \quad \forall\ x\in\mathbb{R}$$

sprich $\mathcal{P}_n((-\infty,x]) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{P}((-\infty,x])$ für jeden Stetigkeitspunkt x von $\mathcal{P}$. Bekanntlich impliziert dies $\mathcal{P}_n \underset{\text{weak}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \mathcal{P}$.
□

Aufgabe 02

Behauptung: F konvergiert gleichmäßig auf jedem Intervall $[a,b]$.

Beweis durch Widerspruch: Unter der Annahme

$$F_n\big|_{[a,b]} \cancel{\underset{\text{gleichmäßig}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}}} F\big|_{[a,b]}$$

existiert ein $\delta>0$ und Teilfolge $(n_k)_{k=1}^\infty$ mit

$$\sup_{x\in[a,b]} |F_{n_k}(x)-F(x)| > \delta$$

sprich

$$|F_{n_k}(x_k)-F(x_k)| \geq \delta \quad , \quad k\in\mathbb{N}$$

für geeignete $x_k\in[a,b]$. Doch da $[a,b]$ kompakt ist, existiert Teilfolge $(x_{k_i})_{i=1}^\infty$ mit $x_{k_i} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} x\in[a,b]$. O.B.d.A.[4] $x_{k_i} \underset{i\to\infty}{\nearrow} x$ oder $x_{k_i} \underset{i\to\infty}{\searrow} x$. Im ersten Fall würde gelten

$$\delta \leq \overline{\lim}_{i\to\infty}\ \left|F_{n_{k_i}}(x_{k_i})-F(x_{k_i})\right| \leq \overline{\lim}_{i\to\infty}\ |\underbrace{F_{n_{k_i}}(x_{k_i})-F_{n_{k_i}}(x)}_{<0}| + \underbrace{\overline{\lim}_{i\to\infty}\ \left|F_{n_{k_i}}(x)-F(x)\right|}_{\substack{0\\ \text{nach Voraussetzung}}} + \underbrace{\overline{\lim}_{n\to\infty}\ |F(x)-F(x_{k_i})|}_{\substack{0\\ \text{da } F \text{ stetig}}}$$

$$= \overline{\lim}_{i\to\infty}\ \Big[F_{n_{k_i}}(x) - \underbrace{F_{n_{k_i}}(x_{k_i})}_{\substack{\geq F_{n_{k_i}}(T)\\ \forall\ T\leq x_{k_i}}}\Big] \overset{\forall\ T<x}{\leq} \overline{\lim}_{i\to\infty}\ \Big[F_{n_{k_i}}(x)-F_{n_{k_i}}(T)\Big] = F(x)-F(T) \quad \forall\ T<x$$

ein Widerspruch zur Linksstetigkeit von F. Im zweiten Fall würde gelten

$$\delta \leq \overline{\lim}_{i\to\infty}\ \left|F_{n_{k_i}}(x_{k_i})-F(x_{k_i})\right| \leq \overline{\lim}_{i\to\infty}\ |\underbrace{F_{n_{k_i}}(x_{k_i})-F_{n_{k_i}}(x)}_{>0}| + \underbrace{\overline{\lim}_{i\to\infty}\ \left|F_{n_{k_i}}(x)-F(x)\right|}_{\substack{0\\ \text{nach Voraussetzung}}} + \underbrace{\overline{\lim}_{n\to\infty}\ |F(x)-F(x_{k_i})|}_{\substack{0\\ \text{da } F \text{ stetig}}}$$

$$= \overline{\lim}_{i\to\infty}\ \Big[\underbrace{F_{n_{k_i}}(x_{k_i})}_{\substack{\leq F_{n_{k_i}}(T)\\ \forall\ T\geq x_{k_i}}} - F_{n_{k_i}}(x)\Big] \overset{\forall\ T>x}{\leq} \overline{\lim}_{i\to\infty}\ \Big[F_{n_{k_i}}(T)-F_{n_{k_i}}(x)\Big] = F(T)-F(x) \quad \forall\ T>x$$

ein Widerspruch zur rechtsseitigen Stetigkeit von F.

Behauptung: $F \underset{\text{gleichmäßig}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} F$ auf $\mathbb{R}$.

[4] Da $(x_{k_i})_{i=1}^\infty$ stets monotone Teilfolge besitzt.

Beweis durch Widerspruch: Angenommen die Aussage wäre falsch, dann existiert $\delta > 0$ und Teilfolge $(F_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ mit $\|F_{n_k} - F\|_\infty > \delta \ \ \forall\ k$, bzw. Punktfolge $(x_k) \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$|F_{n_k}(x_k) - F(x_k)| \geq \delta$$

Nach voriger Behauptung darf $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ in keinem kompakten Intervall enthalten sein, das heißt $x_{k_i} \underset{i\to\infty}{\nearrow} \infty$ oder $x_{k_i} \underset{i\to\infty}{\searrow} -\infty$ für irgendeine Teilfolge $(x_{k_i})_{i=1}^{\infty}$. Im ersten Fall wäre dann

$$\delta \leq \varlimsup_{i\to\infty} \left|F_{n_{k_i}}(x_{k_i}) - F(x_{k_i})\right| \leq \varlimsup_{i\to\infty} \left|F_{n_{k_i}}(x_{k_i}) - 1\right| + \underbrace{\varlimsup_{i\to\infty} |1 - F(x_{k_i})|}_{0}$$

$$= 1 - \varliminf_{i\to\infty} \underbrace{F_{n_{k_i}}(x_{k_i})}_{\substack{\geq F_{n_{k_i}}(T) \\ \forall\ T\leq x_{k_i}}} \overset{\forall\ T\in\mathbb{R}}{\leq} 1 - \underbrace{\varliminf_{i\to\infty} F_{n_{k_i}}(T)}_{\substack{F(T) \\ \text{nach} \\ \text{Voraussetzung}}} \quad \forall\ T \in \mathbb{R}$$

das heißt $F(T) \leq 1 - \delta \ \ \forall\ T \in \mathbb{R}$, ein Widerspruch zu $F(T) \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Analog im zweiten Fall

$$\delta \leq \varlimsup_{i\to\infty} \left|F_{n_{k_i}}(x_{k_i}) - F(x_{k_i})\right| \leq \varlimsup_{i\to\infty} \underbrace{F_{n_{k_i}}(x_{k_i})}_{\substack{\leq F_{n_{k_i}}(T) \\ \forall\ T\geq x_{k_i}}} + \underbrace{\varlimsup_{i\to\infty} F(x_{k_i})}_{0} \overset{\forall\ T\in\mathbb{R}}{\leq} \varlimsup_{i\to\infty} F_{n_{k_i}}(T) = F(T) \quad \forall\ T \in \mathbb{R}$$

ein Widerspruch zu $F(T) \overset{T\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

Aufgabe 03

(a) Die charakteristischen Funktionen der Partialsummen

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \varepsilon_k$$

sind gegeben durch

$$\mathcal{F}(S_n)(t) = \prod_{k=1}^{n} \mathcal{F}(c_k\varepsilon_k)(t) = \prod_{k=1}^{n} \mathcal{F}(\varepsilon_k)(c_k t) = \prod_{k=1}^{n} \cos(c_k t)$$

Konvergieren nun $S_n \underset{\text{f.s.}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} S$ fast sicher, so gehen bekanntlich auch $S_n \underset{\text{d}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} S$. Nach Lévy konvergieren daher auch $\mathcal{F}(S_n) \underset{\text{punktweise}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \mathcal{F}(S)$:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos(c_k t) = \mathcal{F}(S)(t) \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

Behauptung: Es gehen $c_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Beweis: Da $\prod_{k=1}^{\infty} \cos(c_k t)$ überall konvergiert, muss

$$\cos(c_k t) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1 \ \ \forall\ t \in \mathscr{R} \tag{0.3}$$

Da $\prod_{k=1}^{\infty} \cos(c_k t)$ in $t = 0$ stetig ist und den Wert 1 annimmt, existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\left|1 - \prod_{k=1}^{\infty} \cos(c_k t)\right| \leq \varepsilon \quad \forall\ |t| \leq \delta$$

Doch wegen $|\cos(c_k t)| \leq 1 \; \forall \; t, k$ muss insbesondere

$$|\cos(c_k t)| \geq 1 - \varepsilon \quad \forall \; |t| \leq \delta, \; k \in \mathbb{N} \tag{0.4}$$

sein. Da arccos stetig ist, existiert für genügend kleines $\varepsilon' > 0$ ein $\varepsilon > 0$ mit

$$|\cos(c_k t)| \geq 1 - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |c_k t \bmod \pi| \leq \varepsilon'$$

bzw. nach (0.4) ein $\delta > 0$ mit

$$|t| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |c_k t \bmod \pi| \leq \varepsilon' \;\; \forall \; k \in \mathbb{N} \tag{0.5}$$

Wähle nun festes $t_0 < \delta \overset{\text{o.B.d.A.}}{\leq} 1/2$. Währe $|c_k t_0| > \varepsilon'$ für irgendein $k \in \mathbb{N}$, so gäbe es ein $0 < t_1 < t_0$ mit $|c_k t_1 \bmod \pi| > \varepsilon'$, in Widerspruch zu (0.5). Es gilt also sogar

$$|t| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |c_k t| \leq \varepsilon' \quad \forall \; k \in \mathbb{N}$$

Zusammen mit (0.3) impliziert dies

$$c_k \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Als Konsequenz, können wir o.B.d.A. annehmen dass $|c_k| < 1 \;\; \forall \; k \in \mathbb{N}$ sind.
Behauptung: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} [1 - \cos(c_k t)] < \infty \quad \forall \; |t| < 1 \tag{0.6}$$

Beweis: O.B.d.A. seien alle $c_k \neq 0$. Wegen

$$\exists \prod_{k=1}^{\infty} \cos(c_k t) = \prod_{k=1}^{\infty} \Big[1 - \underbrace{(1 - \cos(c_k t))}_{\substack{\in [0,1) \\ \text{für } |t|<1}}\Big] \quad \forall \; |t| < 1$$

muss bekanntlich gelten

$$\exists \sum_{k=1}^{\infty} [1 - \cos(c_k t)] < \infty \qquad \forall \; |t| < 1$$

Behauptung: Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$.

Beweis: Nach (0.6) muss für $|t| < 1$ gelten

$$\mathbb{R} \ni \sum_{k=1}^{\infty} [1 - \cos(c_k t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(c_k t)^2}{2!} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(c_k t)^{2n}}{(2n)!} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \cdot \left[\frac{t^2}{2!} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{c_k^{2n-2} t^{2n}}{(2n)!} \right] \tag{0.7}$$

Doch wegen

$$\underbrace{\left| \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n c_k^{2n-2} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \right|}_{(\clubsuit)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} c_k^{2n-2} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \overset{|c_k| \leq 1}{\leq} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \exp(t) - t - \frac{t^2}{2} - 1 \; \in \mathcal{O}(t^3)$$

ist $(\clubsuit)$ für genügend kleines $|t|$ kleiner als $\frac{t^2}{2!}$ (unabhängig von k), das heißt (0.7) impliziert für genügend kleines $|t|$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \frac{t^2}{2!} \in \mathbb{R}$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$$

(b) Sei

$$t = \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{2^k} \in [0,1] \quad , \quad t_k \in \{0,1\}$$

beliebige dyadische Zahl. Bemerken dass

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{2^k}$$

mit den unabhängigen, auf $\{0,1\}$ gleichverteilten $\delta_k := (\varepsilon_k + 1)/2$ und erhalten

$$\mathcal{P}(Y \leq t) = \mathcal{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \{\delta_1 = t_1, .., \delta_{k-1} = t_{k-1}, \delta_k < t_k\} \cup \{\delta_k = t_k \ \forall\ k \leq n,\ \delta_k = 0 \ \forall\ k > n\}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}\left(\delta_1 = t_1, .., \delta_{k-1} = t_{k-1}, \delta_k < t_k\right) + \mathcal{P}\left(\delta_k = t_k \ \forall\ k \leq n,\ \delta_k = 0 \ \forall\ k > n\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{2^k} + \frac{1}{2^n} \underbrace{\prod_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2}}_{0} = t$$

sprich $\mathcal{P}(Y \leq t) = t$ für jede dyadische Zahl $t \in [0,1]$. Bekanntlich existiert für jede $t \in [0,1]$ monoton wachsende Folge $t_n \nearrow t$ dyadischer Zahlen $t_n \in [0,1]$. Dementsprechend

$$\mathcal{P}(Y \leq t) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}(Y \leq t_n) = \lim_{n\to\infty} t_n = t$$

Natürlich ist ohnehin $0 \leq Y \leq 1$, das heißt Y ist gleichverteilt auf $[0,1]$, bzw. X gleichverteilt auf $[-1,1]$.

(c) Nach (b) gehen die Partialsummen

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon^k}{2^k} \xrightarrow[\mathrm{d}]{n\to\infty} U$$

in Verteilung gegen die Gleichverteilung U auf $[-1,1]$. Nach Lévy

$$\mathcal{F}(S_n)(t) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \mathcal{F}(U)(t) = \frac{\sin t}{t} \quad \forall\ t \in \mathbb{R}$$

□