Stochastik II (Wahrscheinlichkeitstheorie) 2009/10

12. Serie

1. Gegeben seien zwei Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ mit Verteilungsfunktionen F und G. Man definiert dann den Lévy–Abstand $\lambda(\mathbb{P},\mathbb{Q})$ von $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ durch

$$\lambda(\mathbb{P},\mathbb{Q}) := \inf\{\varepsilon > 0 : \ F(x-\varepsilon) - \varepsilon \le G(x) \le F(x+\varepsilon) + \varepsilon \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} .$$

   Beweisen Sie, dass λ eine Metrik auf der Gesamtheit aller Wahrscheinlichkeitsmaße ist und man für Wahrscheinlichkeitsmaße $\{\mathbb{P}_n\}_{n=1}^\infty$ dann und nur dann $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$ hat, wenn $\lim_{n\to\infty} \lambda(\mathbb{P}_n,\mathbb{P}) = 0$ gilt.

2. Gegeben seien Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_n$ und $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}$ mit Verteilungsfunktionen F_n und F. Beweisen Sie folgende Aussage: Gilt $\mathbb{P}_n \xrightarrow{w} \mathbb{P}$ und ist F **stetig**, so konvergiert F_n sogar gleichmäßig gegen F, d.h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| = 0 .$$

3. Sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine Bernoullifolge, d.h. $(\varepsilon_k)_{k=1}^\infty$ sind unabhängige zufällige Größen mit

$$\mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = +1) = 1/2 .$$

   (a) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\sum_{k\ge1} c_k\varepsilon_k$ $\mathbb{P}$–f.ü. bzw. in Wahrscheinlichkeit existiert, wenn $\sum_{k\ge1} c_k^2 < \infty$ gilt. Beweisen Sie die Umkehrung, also dass die obige Summe genau für $\sum_{k\ge1} c_k^2 < \infty$ $\mathbb{P}$–f.ü. konvergiert.
   Hinweis: Untersuchen Sie $\prod_{k\ge1} \cos(c_k t)$ auf Konvergenz für t nahe Null.

   (b) Die zufällige Größe X sei durch

$$X = \sum_{k\ge1} \varepsilon_k/2^k$$

   definiert. Bestimmen Sie das Verteilungsgesetz von X.
   Hinweis: Untersuchen Sie $Y := (X+1)/2$ und berechnen Sie $\mathbb{P}(Y \le t)$ zuerst für dyadisch rationale Zahlen t aus $[0,1]$.

   (c) Beweisen Sie mit (b) die Identität

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^\infty \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) \quad \text{für } t \in \mathbb{R} .$$

Abgabe: 26. 01. 10