Wahrscheinlichkeitstheorie
FSU Jena - WS 09/10
Serie 11 - Lösungen

Stilianos Louca

April 21, 2010

Aufgabe 01

Setze

$$\mathcal{A} := \{B \in \mathscr{B}(T) : \mathcal{P}(B) = \sup\{\mathcal{P}(A) : A \subseteq B \text{ abgeschlossen}\}\}$$

$$\mathcal{O} := \{B \in \mathscr{B}(T) : \mathcal{P}(B) = \inf\{\mathcal{P}(G) : B \subseteq G \text{ offen}\}\}$$

und $\mathfrak{S} := \mathcal{O} \cap \mathcal{A}$.
Behauptung 01: Für $B \in \mathcal{A}$ gilt $B^c \in \mathcal{O}$ und für $B \in \mathcal{O}$ gilt $B^c \in \mathcal{A}$. Insbesondere gilt dann für $B \in \mathfrak{S}$ auch $B^c \in \mathfrak{S}$.
Beweis: Tatsächlich folgt $B^c \in \mathcal{O}$ aus $B \in \mathcal{A}$ denn

$$\mathcal{P}(B^c) = 1 - \mathcal{P}(B) = 1 - \underbrace{\sup\{\mathcal{P}(A) : A \subseteq B,\ A \text{ abgeschlossen}\}}_{-\inf\{-\mathcal{P}(A)\ :\ A\subseteq B \text{ abgeschlossen}\}}$$

$$= \inf\Big\{\underbrace{1 - \mathcal{P}(A)}_{\mathcal{P}(A^c)} : \underbrace{A \subseteq B}_{\Leftrightarrow\ B^c\subseteq A^c},\ \underbrace{A \text{ abgeschlossen}}_{\Leftrightarrow\ A^c \text{ offen}}\Big\} = \inf\{\mathcal{P}(A^c) : B^c \subseteq A^c,\ A^c \text{ offen}\}$$

und $B^c \in \mathcal{A}$ aus $B \in \mathcal{O}$ denn

$$\mathcal{P}(B^c) = 1 - \mathcal{P}(B) = 1 - \underbrace{\inf\{\mathcal{P}(G) : B \subseteq G,\ G \text{ offen}\}}_{-\sup\{-\mathcal{P}(G):B\subseteq G,\ G \text{ offen}\}}$$

$$= \sup\Big\{\underbrace{1 - \mathcal{P}(G)}_{\mathcal{P}(G^c)} : \underbrace{B \subseteq G}_{\Leftrightarrow\ G^c\subseteq B^c},\ \underbrace{G \text{ offen}}_{\Leftrightarrow\ G^c \text{ abgeschlossen}}\Big\} = \sup\{\mathcal{P}(G^c) : G^c \subseteq B^c,\ G^c \text{ abgeschlossen}\}$$

Behauptung 02: $\mathfrak{S}$ enthält alle offenen Mengen.
Beweis: Sei O offen, dann ist offensichtlich $O \in \mathcal{O}$. Nach Behauptung (01) genügt es nun zu zeigen dass $O^c \in \mathcal{O}$. Definieren dazu die Abbildung

$$d(\cdot, O^c) : T \to [0, \infty) \quad , \quad T(x, O^c) := \inf_{y \in O^c} \rho(x, y)$$

Dann ist bekanntlich $d(\cdot, O^c) : T \to [0, \infty)$ auf T gleichmäßig stetig [1] und es gilt

$$G_n := \overbrace{d^{-1}(\cdot, O^c)(\underbrace{[0, 1/n)}_{\searrow_{n\to\infty} \{0\}})}^{\text{offen}} \underset{n\to\infty}{\searrow} d^{-1}(\cdot, O^c)(\{0\}) \overset{[1]}{=} O^c$$

sprich es existiert eine fallende Folge offener Mengen $G_n \underset{n\to\infty}{\searrow} O^c$. Bekanntlich gilt dann

$$\mathcal{P}(O^c) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}(G_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(G_n) \geq \inf\{\mathcal{P}(G) : O^c \subseteq G,\ G \text{ offen}\} \geq \mathcal{P}(O^c)$$

woraus die Behauptung folgt.
Behauptung 03: $\mathfrak{S}$ ist σ-Algebra.

Beweis: Wegen $\overbrace{\emptyset}^{\text{offen}} \in \mathfrak{S}$ und Behauptung (01) bleibt zu zeigen die Abgeschlossenheit bzgl. abzählbarer Vereinigungen. Seien also $B_1, B_2, .. \in \mathfrak{S}$, dazu $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Zu zeigen wäre: zu $\varepsilon > 0$ existieren $A_\varepsilon \subseteq B$ abgeschlossen und $G_\varepsilon \supseteq B$ offen mit

$$\mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A_\varepsilon) \le \varepsilon \quad \wedge \quad \mathcal{P}(G_\varepsilon) - \mathcal{P}(B) \le \varepsilon \tag{0.1}$$

Tatsächlich: Wegen $B_n \in \mathcal{A} \cap \mathcal{O}$ existieren $A_n \subseteq B_n$ abgeschlossen und $G_n \supseteq B_n$ offen mit

$$\mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A_n) \le \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \wedge \quad \mathcal{P}(G_n) - \mathcal{P}(B) \le \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{0.2}$$

Setzt man nun

$$G_\varepsilon := \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n}_{\text{offen}} \supseteq B$$

so folgt einerseits

$$\mathcal{P}(G_\varepsilon) - \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(G_\varepsilon \setminus B) = \mathcal{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n \setminus B\right) \le \mathcal{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n \setminus B_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mathcal{P}(G_n \setminus B_n)}_{\le \frac{\varepsilon}{2^n}} \le \varepsilon \tag{0.3}$$

Anderseits muss wegen

$$\infty > \mathcal{P}(B) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}\Bigg(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{n} B_k}_{\nearrow_{n\to\infty} B}\Bigg)$$

ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$\mathcal{P}(B) - \mathcal{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} B_k\right) \le \frac{\varepsilon}{2} \tag{0.4}$$

Setzt man nun

$$A_\varepsilon := \underbrace{\bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} A_n}_{\text{abgeschlossen}} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} B_k \subseteq B \tag{0.5}$$

so gilt

$$\mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A_\varepsilon) \overset{(0.4)}{\le} \frac{\varepsilon}{2} + \mathcal{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} B_k\right) - \mathcal{P}(A_\varepsilon) \overset{(0.5)}{=} \frac{\varepsilon}{2} + \mathcal{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} (B_k \setminus A_\varepsilon)\right) \le \frac{\varepsilon}{2} + \mathcal{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n_\varepsilon} B_k \setminus A_k\right)$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \underbrace{\mathcal{P}(B_k \setminus A_k)}_{\substack{\le \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{2^k} \\ \text{nach } (0.2)}}}_{\le \frac{\varepsilon}{2}} \le \varepsilon$$

was zusammen mit (0.3) zu zeigen war.
Behauptung 04: $\mathfrak{S} = \mathscr{B}(T)$.
Beweis: Da $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{B}(T)$ alle offenen Mengen von T enthält und σ-Algebra ist, folgt die Behauptung.
$\square$

Aufgabe 02

Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T$ dicht in T.
Behauptung: Es gilt

$$\mathcal{P}(T) = \sup\{\mathcal{P}(K) : K \subseteq T,\ K \text{ kompakt}\}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dann existiert wegen

$$\bigcup_{k=1}^{m} B_{\frac{1}{n}}(x_k) \underset{m\to\infty}{\nearrow} T \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $m_n \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathcal{P}\left[\bigcup_{k=1}^{m_n} B_{\frac{1}{n}}(x_k)\right] \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Setzt man nun

$$K := \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k=1}^{m_n} B_{\frac{1}{n}}(x_k)}_{\text{abgeschlossen}}$$

so ist K abgeschlossen und Präkompakt, denn für $\delta > 0$ existiert stets ein $n > \frac{1}{\delta}$ und daher

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{m_n} B_{\frac{1}{n}}(x_k) \subseteq \bigcup_{k=1}^{m_n} B_{\delta}(x_k)$$

Ferner gilt

$$\mathcal{P}(K^c) = \mathcal{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{m_n} B^c_{\frac{1}{n}}(x_k)\right] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}\Bigg(\underbrace{\bigcap_{k=1}^{m_n} B^c_{\frac{1}{n}}(x_k)}_{\left[\bigcup_{k=1}^{m_n} B_{\frac{1}{n}}(x_k)\right]^c}\Bigg) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

was zu zeigen war.

Behauptung: Für beliebige $B \in \mathscr{B}(T)$ gilt

$$\mathcal{P}(B) = \sup\{\mathcal{P}(K) : K \subseteq B,\ K \text{ kompakt}\}$$

Beweis: Nach Aufgabe (01) existieren abgeschlossene $A_n \subseteq B$ mit $\mathcal{P}(A_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{P}(B)$ und nach obiger Behauptung kompakte K_n mit $\mathcal{P}(K_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{P}(T) = 1$. Bekanntlich sind dann auch $K_n \cap A_n \subseteq B,\ n \in \mathbb{N}$ kompakt und es gilt

$$\mathcal{P}(B) \geq \mathcal{P}(\underbrace{K_n \cap A_n}_{K_n \setminus A_n^c}) \geq \underbrace{\mathcal{P}(K_n)}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1} - \underbrace{\mathcal{P}(A_n^c)}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1-\mathcal{P}(B)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{P}(B)$$

das heißt

$$\mathcal{P}(K_n \cap A_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{P}(B)$$

Aufgabe 03

(a) (Allgemein auf separablem metrischem Raum (T, d) und T-wertigen X, X_n). Es gehen $X_n \underset{\mathrm{p}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} X$, sprich

$$\mathcal{P}\left(d(X_n, x) > \varepsilon\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

Zu zeigen wäre: Für $G \subseteq T$ offen gilt

$$\mathcal{P}\left(X \in G\right) \leq \varliminf_{n\to\infty} \mathcal{P}(X_n \in G)$$

Definiert man zu $\varepsilon > 0$

$$G^{\varepsilon} := \{x \in G : B_{\varepsilon}(x) \subseteq G\}$$

so gilt

$$\mathcal{P}_X(G^\varepsilon) = \varliminf_{n\to\infty} \mathcal{P}(X \in G^\varepsilon) = \varliminf_{n\to\infty} \underbrace{\mathcal{P}(X \in G^\varepsilon,\ d(X_n, X) \le \varepsilon)}_{\le \mathcal{P}(X_n \in G)} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathcal{P}(X \in G^\varepsilon,\ d(X_n, X) > \varepsilon)}_{\le \mathcal{P}(d(X_n,X)>\varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0}}_{0}$$

$$\le \varliminf_{n\to\infty} \mathcal{P}(X_n \in G)$$

Zusammen mit

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{G^{\frac{1}{n}}}_{\substack{\text{wachsend}\\ \text{in } n}} = \left\{x \in G : \exists\, n \in \mathbb{N} : B_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq G\right\} \overset{G \text{ offen}}{=} G$$

folgt dann

$$\mathcal{P}_X(G) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}_X(G^{\frac{1}{n}}) \le \varliminf_{n\to\infty} \mathcal{P}(X_n \in G)$$

was zu zeigen war.
Gegenbeispiel zur Umkehraussage: Betrachten den Grundraum $\left([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \mathcal{P} := \lambda^1\right)$, darauf die Zufallsvariablen $X_n, X : [0,1] \to [0,1]$ definiert durch

$$X_n(t) = t \quad , \quad X(t) = 1 - t \quad , \quad t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}$$

Dann sind alle X_n, X auf $[0,1]$ gleichverteilt so dass insbesondere $X_n \underset{\mathrm{d}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} X$. Doch anderseits

$$\mathcal{P}\left(d(X_n, X) > \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

(b) Die Zufallsvariable c ist δ_0-verteilt so dass $X_n \underset{\mathrm{d}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} c$ genau dann gilt wenn

$$\int_{\mathbb{R}} f\ d\mathcal{P}_{X_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(c) \quad \forall\ f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$$

Richtung "⇒": Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dazu die Dreiecksfunktion

$$f(x) := \max\left\{0, 1 - \tfrac{|x-c|}{\varepsilon}\right\}$$

Dann gilt

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\mathcal{P}_{X_n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} = \int_{B_\varepsilon(c)} \underbrace{f}_{\le 1}\ d\mathcal{P}_{X_n} \le \int_{B_\varepsilon(c)} d\mathcal{P}_{X_n} = \underbrace{\mathcal{P}_{X_n}(B_\varepsilon(c))}_{\mathcal{P}(d(X_n,c)\le\varepsilon)}$$

sprich $X_n \underset{\mathrm{p}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} c$.
Richtung "⇐": Siehe (a).

(c) Betrachten den Grundraum $\left([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \mathcal{P} := \lambda^1\right)$, darauf die Zufallsvariablen $X_n, Y_n, X, Y : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$X_n = X = Y = \mathrm{Id}_{[0,1]} \quad , \quad Y_n := 1 - \mathrm{Id}_{[0,1]}$$

Dann sind alle X_n, Y_n, X, Y gleichverteilt auf $[0,1]$ und insbesondere gehen $X_n \underset{\mathrm{d}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} X,\ Y_n \underset{\mathrm{d}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} Y$. Anderseits ist jedoch

$$X_n + Y_n = 1 \quad , \quad X + Y = 2\,\mathrm{Id}_{[0,1]}$$

sprich $(X_n + Y_n) \sim \delta_1$ und $(X+Y)$ gleichverteilt auf $[0,2]$. Insbesondere $(X_n + Y_n) \underset{\mathrm{d}}{\overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow}} (X+Y)$.

(d) Seien F_X, F_{X_n}, F_{X+c} und $F_{X_n+Y_n}$ jeweils die Verteilungsfunktionen der X, X_n, $(X+c)$ und (X_n+Y_n) und t ein Stetigkeitspunkt von F_{X+c}. Dann wäre zu zeigen $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(t) = F_{X+c}(t)$.

Wählen $\varepsilon > 0$ beliebig klein, so dass $t \pm \varepsilon$ auch Stetigkeitspunkte von F_{X+c} sind. Offensichtlich ist dann sowohl $(t-c-\varepsilon)$ als auch $(t-c+\varepsilon)$ Stetigkeitspunkt von F_X, so dass nach Voraussetzung gilt

$$F_{X+c}(t\pm\varepsilon) = F_X(t-c\pm\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t-c\pm\varepsilon) \tag{0.6}$$

Können also schreiben

$$F_{X+c}(t\pm\varepsilon) \overset{(0.6)}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathcal{P}\left(X_n + c \le t\pm\varepsilon\right)}_{\substack{\mathcal{P}(X_n+c\le t\pm\varepsilon,\ d(Y_n,c)\le\varepsilon) \\ +\mathcal{P}(X_n+c\le t\pm\varepsilon,\ d(Y_n,c)>\varepsilon)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathcal{P}\left(X_n + c \le t\pm\varepsilon,\ d(Y_n,c)\le\varepsilon\right) + \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathcal{P}\left(X_n + c \le t\pm\varepsilon,\ d(Y_n,c)>\varepsilon\right)}_{\le \mathcal{P}(d(Y_n,c)>\varepsilon) \underset{(b)}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 0}$$

(beachte dass nach (b) $Y_n \underset{\text{p}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} c$). Hieraus folgt

$$F_{X+c}(t+\varepsilon) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \mathcal{P}\left(X_n + c \le t+\varepsilon,\ d(Y_n,c)\le\varepsilon\right) \ge \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \mathcal{P}\left(X_n + Y_n \le t,\ d(Y_n,c)\le\varepsilon\right)$$

$$\overset{\substack{Y_n \underset{\text{p}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} c \\ \&\ (0.7)}}{=} \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \underbrace{\mathcal{P}\left(X_n + Y_n \le t\right)}_{F_{X_n+Y_n}(t)}$$

$$F_{X+c}(t-\varepsilon) = \underline{\lim_{n\to\infty}}\ \mathcal{P}\left(X_n + c \le t-\varepsilon,\ d(Y_n,c)\le\varepsilon\right) \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\ \mathcal{P}\left(X_n + Y_n \le t,\ d(Y_n,c)\le\varepsilon\right)$$

$$\overset{\substack{Y_n \underset{\text{p}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} c \\ \&\ (0.7)}}{=} \underline{\lim_{n\to\infty}}\ \underbrace{\mathcal{P}\left(X_n + Y_n \le t\right)}_{F_{X_n+Y_n}(t)}$$

für beliebig kleines $\varepsilon > 0$. Da F_{X+c} in t stetig angenommen wurde, gilt

$$F_{X+c}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} F_{X+c}(t-\varepsilon) \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\ F_{X_n+Y_n}(t) \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\ F_{X_n+Y_n}(t) \le \lim_{\varepsilon\to 0} F_{X+c}(t+\varepsilon) = F_{X+c}(t)$$

was zu zeigen war.

(e) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. Dann ist auch $f \circ g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$. Gehen nun $X_n \underset{\text{d}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} X$, so heißt dies

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} (f\circ g)\ d\mathcal{P}_{X_n}}_{\int_{\mathbb{R}} f\ d\mathcal{P}_{g\circ X_n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (f\circ g)\ d\mathcal{P}_{X}}_{\int_{\mathbb{R}} f\ d\mathcal{P}_{g\circ X}}$$

was zu zeigen war.

□

Hilfsaussage 01

Sei $\mathcal{P}$ Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathfrak{S})$ und $A_n, B_n \in \mathfrak{S}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{P}(B_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Dann gilt:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \mathcal{P}(A_n \cap B_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \mathcal{P}(A_n) \tag{0.7}$$

(analog auch für $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}$).

Erläuterung:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \underbrace{\mathcal{P}(A_n \cap B_n)}_{\substack{\mathcal{P}(A_n) \\ +\mathcal{P}(B_n) \\ -\mathcal{P}(A_n \cup B_n)}} = \varlimsup_{n\to\infty} \mathcal{P}(A_n) + \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathcal{P}(B_n)}_{\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1} - \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathcal{P}(A_n \cup B_n)}_{\geq \mathcal{P}(B_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1} = \varlimsup_{n\to\infty} \mathcal{P}(A_n)$$

References

[1] *Übungsserie 01 zur Maßtheorie*, FSU Jena, SS 2008
http://www.skipjackTuna.net/LibList/lib/php/index.php?LL_library=fsu_jena&LL_module=../../libraries/LIB_fsu_jena/MODULE_Masstheorie (11.01.2010)