Stochastik II (Wahrscheinlichkeitstheorie) 2009/10

<u>11. Serie</u>

1. Sei (T,ρ) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(T,\mathcal{B}(T))$ regulär ist, d.h. für jede Borelmenge $B \in \mathcal{B}(T)$ gilt

$$\mathbb{P}(B) = \sup\{\mathbb{P}(A) : A \subseteq B\ ,\ A \text{ abgeschlossen}\}$$

und

$$\mathbb{P}(B) = \inf\{\mathbb{P}(G) : B \subseteq G\ ,\ G \text{ offen}\}\ .$$

Hinweis: Man betrachte die Menge der Borelmengen B, die **beide** Eigenschaften gleichzeitig erfüllen und zeige, diese bilden eine σ–Algebra.

2. $(\star)$ Sei (T,ρ) ein vollständiger separabler (es existiert eine abzählbare dichte Teilmenge in T) metrischer Raum. Dann gilt für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{B}(T)$ sogar

$$\mathbb{P}(B) = \sup\{\mathbb{P}(K) : K \subseteq B\ ,\ K \text{ kompakt}\}\ .$$

Hinweis: Man zeige diese Eigenschaft zuerst für $B = T$. Dabei verwende man, dass für vollständige Räume T eine Teilmenge $K \subseteq T$ dann und nur dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen ist und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches ε–Netz existiert. Die Ausage für beliebige Borelmengen B erhält man dann unter Verwendung von Aufgabe 1.

3. Gegeben seien zufällige Größen X_n, $n = 1, 2, \ldots$ und X. Bekanntlich konvergiert X_n gegen X in Verteilung, $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, wenn

$$\mathbb{E}f(X_n) \to \mathbb{E}f(X)$$

für alle stetigen beschränkten Funktionen f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ gilt. Man beweise folgende Eigenschaften der Konvergenz in Verteilung:

   (a) Aus $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ folgt stets $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$. Zeigen Sie an einem Beispiel, dass für zufällige Größen X_n und X aus $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ im allgemeinen nicht $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ folgt.

   (b) Beweisen Sie, dass $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$ mit $c \in \mathbb{R}$ genau dann gilt, wenn man $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$ hat.

   (c) Konstruieren Sie zwei konkrete Folgen $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ und $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ von zufälligen Größen mit $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ und $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$, aber $X_n + Y_n$ konvergiert <u>nicht</u> in Verteilung gegen $X + Y$.

   (d) Zeigen Sie, dass aber aus $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ und $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} c$ mit $c \in \mathbb{R}$ immer $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + c$ folgt.

   (e) Beweisen Sie, dass für jede stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ stets auch $g \circ X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} g \circ X$ gilt.

Abgabe: 19. 01. 10