Wahrscheinlichkeitstheorie
FSU Jena - WS 09/10
Serie 10 - Lösungen

Stilianos Louca

January 20, 2010

Aufgabe 01

Es genügt die Behauptung für $a = 0$ zu zeigen, da für jedes andere $a \in \mathbb{R}$ folgen würde

$$\mathcal{P}(\{a\}) = \mathcal{P}_{x \mapsto x-a}(\{0\}) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \underbrace{\hat{\mathcal{P}}_{x\mapsto x-a}(t)}_{e^{-ita}\hat{\mathcal{P}}(t)} \ dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-ita}\hat{\mathcal{P}}(t) \ dt$$

Mit

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \hat{\mathcal{P}}(t) \ dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \ d\mathcal{P}(x) \ dt \overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{2T} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_{-T}^{T} e^{itx} \ dt}_{\frac{2\sin(Tx)}{x}} \ d\mathcal{P}(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\sin(Tx)}{Tx}}_{\substack{\text{majorisiert} \\ \text{durch 1}}} \ d\mathcal{P}(x)$$

und

$$\frac{\sin(Tx)}{Tx} \xrightarrow[\text{punktweise}]{T\to\infty} \begin{cases} 1 & : x = 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

folgt nach Lebesgue

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \hat{\mathcal{P}}(t) \ dt = \int_{\mathbb{R}} 1_{\{0\}} \ d\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}(\{0\})$$

□

Aufgabe 02

Wegen

$$\mathcal{F}(\mathcal{P} * \mathcal{P}^-)(t) \overset{05(\text{d})}{=} \mathcal{F}(\mathcal{P})(t) \cdot \mathcal{F}(\mathcal{P}^-)(t) \overset{05(\text{f})}{=} \mathcal{F}(\mathcal{P})(t) \cdot \underbrace{\mathcal{F}(\mathcal{P})(-t)}_{\mathcal{F}(\mathcal{P})^*(t)} = |\mathcal{F}(\mathcal{P})(t)|^2$$

gilt einerseits

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left|\hat{\mathcal{P}}(t)\right|^2 \ dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathcal{F}(\mathcal{P} * \mathcal{P}^-)(t) \ dt \overset{01}{=} (\mathcal{P} * \mathcal{P}^-)(\{0\})$$

Anderseits ist

$$(\mathcal{P} * \mathcal{P}^-)(\{0\}) = (\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}^-)\left(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}\right) = (\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})\Big(\underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}}_{=:D}\Big)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} 1_D(x,y)\ d(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})(x,y) \overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} 1_D(x,y)\ d\mathcal{P}(x)}_{\mathcal{P}(\{y\})}\ d\mathcal{P}(y)$$

$$= \int\limits_{\{y \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(\{y\}) \neq 0\}} \mathcal{P}(\{y\})\ d\mathcal{P}(y) = \sum_{\{y \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(\{y\}) \neq 0\}} \underbrace{\int\limits_{\{y\}} \mathcal{P}(\{y\})\ d\mathcal{P}(y)}_{\mathcal{P}(y)^2} = \sum_{\{y : \mathcal{P}(\{y\}) \neq 0\}} \mathcal{P}(y)^2$$

Beachte dass die Menge

$$\{y \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(\{y\}) \neq 0\}$$

stets abzählbar ist, da die Verteilungsfunktion von $\mathcal{P}$ höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt.
$\square$

Aufgabe 03

Nach Aufgabe 01 gilt

$$\mathcal{P}(X = k) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} e^{-itk} \hat{X}(t)\ dt$$

Da X nur Werte in $\mathbb{Z}$ annimmt, ist $\hat{X}$ 2π-periodisch, denn

$$\hat{X}(t + 2\pi) = \mathbb{E} e^{itX} \underbrace{e^{i2\pi X}}_{1} = \hat{X}(t)$$

Folglich ist für $k \in \mathbb{Z}$ auch $f(t) := e^{-itk}\hat{X}(t)$ 2π-periodisch & beschränkt, woraus bekanntlich folgt

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} f(t)\ dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt$$

$\square$

Aufgabe 04

(a) Aus $(1 - \alpha)^2 \geq 0$ folgt direkt die Ungleichung

$$\alpha^2 \geq 2\alpha - 1 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \tag{0.1}$$

so dass sich schreiben lässt

$$1 - \Re\hat{\mathcal{P}}(2t) = 1 - \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\cos(2tx)}_{2\cos^2(tx) - 1}\ d\mathcal{P}(x) = 2 - 2\int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\cos^2(tx)}_{\geq 2\cos(tx) - 1}\ d\mathcal{P}(x) \leq 4 - 4\int\limits_{\mathbb{R}} \cos(tx)\ d\mathcal{P}(x) = 4\left[1 - \Re\hat{\mathcal{P}}(t)\right]$$

(b) Sei $\hat{\mathcal{P}}\big|_{(-\varepsilon,\varepsilon)} = 1$ für geeignetes $\varepsilon > 0$. Dann muss wegen

$$0 \leq 1 - \overbrace{\Re\hat{\mathcal{P}}(t)}^{\leq 1} \leq 4\left[1 - \Re\hat{\mathcal{P}}(t/2)\right] \overset{|t| \leq 2\varepsilon}{=} 0$$

gelten

$$\Re\hat{\mathcal{P}}\Big|_{(-2\varepsilon,2\varepsilon)} = 1$$

bzw. wegen $|\hat{\mathcal{P}}| \leq 1$ auch

$$\Im\hat{\mathcal{P}}\Big|_{(-2\varepsilon,2\varepsilon)} = 0$$

sprich $\hat{\mathcal{P}}\Big|_{(-2\varepsilon,2\varepsilon)}$. Wegen

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-2^n\varepsilon, 2^n\varepsilon)$$

folgt induktiv $\hat{\mathcal{P}} \equiv 1$. Wegen $\hat{\delta_0} \equiv 1$ folgt nach Eindeutigkeitssatz

$$\mathcal{P} = \delta_0$$

□

Aufgabe 05

(a)

$$\hat{\mathcal{P}}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{e^{i\langle\mathbf{x},0\rangle}}_{1} d\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = 1$$

(b) Die Funktionenfamilie

$$f_{\mathbf{h}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad , \quad f_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) := \left|e^{i\langle\mathbf{h},\mathbf{x}\rangle} - 1\right| \quad , \quad \mathbf{h},\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

wird majorisiert durch die Integrable $2 \geq |f_{\mathbf{h}}|$ und konvergiert für $\mathbf{h} \to 0$ punktweise gegen 0. Nach Lebesgue folgt daher

$$\left|\hat{\mathcal{P}}(\mathbf{k}+\mathbf{h}) - \hat{\mathcal{P}}(\mathbf{k})\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left|e^{i\langle\mathbf{k}+\mathbf{h},\mathbf{x}\rangle} - e^{i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}\rangle}\right|}_{\left|e^{i\langle\mathbf{h},\mathbf{x}\rangle}-1\right|} d\mathcal{P}(\mathbf{x}) \overset{\mathbf{h}\to 0}{\longrightarrow} 0$$

sprich $\hat{\mathcal{P}}$ ist stetig (sogar gleichmäßig stetig).

(c) O.B.d.A. sei $\mathcal{P}$ erzeugt durch die $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsvariable X. Dann gilt für $\mathbf{k}_1, .., \mathbf{k}_m \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^m$:

$$\sum_{i,j=1}^{m} c_i^* \hat{\mathcal{P}}(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j) c_j = \sum_{i,j=1}^{n} c_i^* c_j \mathbb{E} e^{i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_j)X} = \mathbb{E} \sum_{i,j=1}^{n} \left[c_i e^{-i\mathbf{k}_i X}\right]^* \cdot \left[c_j e^{-i\mathbf{k}_j X}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i e^{-i\mathbf{k}_i X}\right]^* \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} c_j e^{-i\mathbf{k}_j X}\right] = \mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n} c_i e^{-i\mathbf{k}_i X}\right|^2 \geq 0$$

(d) Definieren die lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$g(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \mathbf{x} + \mathbf{y} \quad , \quad \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

Diese besitzt die Adjungierte

$$g^\dagger : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad , \quad g^\dagger(\mathbf{z}) := (\mathbf{z},\mathbf{z}) \ , \ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$$

Hieraus folgt schließlich

$$\mathcal{F}(\underbrace{\mathcal{P} * \mathcal{Q}}_{(\mathcal{P}\otimes\mathcal{Q})\circ g^{-1}})(\mathbf{k}) \overset{\text{(f)}}{=} \mathcal{F}(\mathcal{Q}\otimes\mathcal{P}) \circ \underbrace{g^\dagger(\mathbf{k})}_{(\mathbf{k},\mathbf{k})} \overset{\text{(e)}}{=} \mathcal{F}(\mathcal{Q})(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{F}(\mathcal{P})(\mathbf{k})$$

(e) O.B.d.A. seien die $\mathcal{P}_1, .., \mathcal{P}_m$ erzeugt durch die unabhängigen, $\mathbb{R}^n$-wertigen Zufallsvariablen $X_1, .., X_m$. Dann wird $\mathcal{P}_1 \otimes .. \otimes \mathcal{P}_m$ erzeugt durch die $\mathbb{R}^{m\times n}$-wertige Zufallsvariable $\mathbf{X} := (X_1, .., X_m)$ und es gilt

$$\mathcal{F}\left(\bigotimes_{i=1}^m \mathcal{P}_i\right)(\mathbf{k}) = \mathbb{E}\underbrace{\exp\left[i\left\langle \mathbf{k}, \mathbf{X}\right\rangle\right]}_{\prod_{i=1}^n e^{i\langle \mathbf{k}_i, X_i\rangle}} = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}e^{i\langle \mathbf{k}_i, X_i\rangle} = \prod_{i=1}^n \mathcal{F}(X_i)(\mathbf{k}_i) \quad , \quad \mathbf{k} = (\mathbf{k}_1, .., \mathbf{k}_m) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

(f) O.B.d.A. sei $\mathcal{P}$ erzeugt durch die $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsvariable, dann ist $\mathcal{P} \circ A^{-1}$ erzeugt durch die $\mathbb{R}^m$-wertige Zufallsvariable AX. Daher

$$\mathcal{F}(\mathcal{P} \circ A^{-1})(\mathbf{k}) = \mathbb{E}e^{i\langle \mathbf{k}, AX\rangle} = \mathbb{E}e^{i\left\langle A^\dagger \mathbf{k}, X\right\rangle} = \mathcal{F}(\mathcal{P})(A^\dagger \mathbf{k}) \quad , \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^m$$

das heißt $\mathcal{F}(\mathcal{P} \circ A^{-1}) = \mathcal{F}(\mathcal{P}) \circ A^\dagger$, wobei $A^\dagger : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ der zu A adjungierte Operator ist.

$\square$