Stochastik II (Wahrscheinlichkeitstheorie) 2009/10

<u>10. Serie</u>

1. Beweisen Sie, dass für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}$ und für $a \in \mathbb{R}$ stets
$$\mathbb{P}\big(\{a\}\big) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathrm{e}^{-ita}\,\widehat{\mathbb{P}}(t)\,dt$$
gilt.

2. Zeigen Sie
$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\,\widehat{\mathbb{P}}(t)|^2\,dt = \sum_{\{a:\,\mathbb{P}(\{a\})>0\}} \mathbb{P}(\{a\})^2$$
für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}$.
Hinweis: Wenden Sie die erste Aufgabe auf das symmetrisierte Maß $\tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P}\star\mathbb{P}^-$ mit $\mathbb{P}^-(B) := \mathbb{P}(-B)$ an.

3. Es sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass dann für $k \in \mathbb{Z}$ die Aussage
$$\mathbb{P}\{X = k\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-itk}\,\widehat{X}(t)\,\mathrm{d}t$$
gilt.

4. (a) Zeigen Sie die für $t \in \mathbb{R}$ und jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}$ gültige Ungleichung
$$1 - \mathrm{Re}\,\widehat{\mathbb{P}}(2t) \le 4\,[1 - \mathrm{Re}\,\widehat{\mathbb{P}}(t)]\ .$$
Hinweis: Verwenden Sie eine Formel für den Cosinus des doppelten Winkels.
   (b) Schlußfolgern Sie aus (a) die folgende Behauptung: Gibt es für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}$ ein $\varepsilon > 0$ mit $\widehat{P}(t) = 1$ für $|t| < \varepsilon$, so folgt $\mathbb{P} = \delta_0$.

5. Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ und $\widehat{\mathbb{P}} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ die durch
$$\widehat{\mathbb{P}}(a) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,a\rangle}\,\mathrm{d}\mathbb{P}(x)\,, \quad a \in \mathbb{R}^n\ ,$$
definierte charakteristische Funktion. Beweisen Sie folgende Eigenschaften von $\widehat{\mathbb{P}}$:
   (a) $\widehat{\mathbb{P}}(0) = 1$
   (b) $\widehat{\mathbb{P}}$ ist stetig bzgl. des Euklidischen Abstands auf $\mathbb{R}^n$.
   (c) $\widehat{\mathbb{P}}$ ist nichtnegativ definit.
   (d) Es gilt $\widehat{\mathbb{P}\star\mathbb{Q}}(a) = \widehat{\mathbb{P}}(a)\cdot\widehat{\mathbb{Q}}(a)$.
   (e) Ist $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_n$ ein Produktmaß, so folgt
$$\widehat{\mathbb{P}}(a) = \widehat{\mathbb{P}_1}(a_1)\cdots\widehat{\mathbb{P}_n}(a_n) \quad \text{für} \quad a = (a_1,\ldots,a_n)\ .$$
   (f) Sei $A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Wie berechnet sich $\widehat{\mathbb{Q}}$ mit $\mathbb{Q} = \mathbb{P}\circ A^{-1}$ aus $\widehat{\mathbb{P}}$?

Abgabe: 12. 01. 10