Wahrscheinlichkeitstheorie
FSU Jena - WS 09/10
Serie 09 - Lösungen

Stilianos Louca

January 5, 2010

Aufgabe 01

(a) Definitionsgemäß

$$\hat{\mathcal{P}}(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \frac{a-|x|}{a^2}\, dx = \underbrace{\frac{1}{a}\int_{-a}^{a} e^{ikx}\, dx}_{\frac{2}{ak}\sin(ka)} + \underbrace{\int_{-a}^{0} e^{ikx}\frac{x}{a^2}\, dx + \int_{0}^{a} e^{ikx}\frac{-x}{a^2}\, dx}_{\frac{2}{a^2k^2}[1-ak\sin(ak)-\cos(ak)]} = \frac{2}{a^2k^2}\left[1-\cos(ak)\right] \quad , \quad k\in\mathbb{R}$$

(b) Beginnen mit

$$\hat{\mathcal{P}}(k) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ikx}}{\pi(1+x^2)}\, dx$$

und bemerken dass

$$\hat{\mathcal{P}}(-k) = \hat{\mathcal{P}}^*(k) \quad , \quad k\in\mathbb{R}$$

sprich es genügt $\mathcal{P}(k)$ für $k>0$ zu berechnen (bekanntlich $\mathcal{P}(0)=1$). Im Fall $k>0$ geht

$$\lim_{\substack{|x|\to\infty \\ \Im(x)>0}} |x|\cdot \underbrace{\frac{e^{ikx}}{\pi(1+x^2)}}_{=:f(x)} = 0$$

wobei f in $\{\Im>0\}$-Ebene als einzigen Pol den Pol 1. Ordnung $x_0=i$ besitzt. können wir den Residuensatz anwenden und erhalten

$$\hat{\mathcal{P}}(k) = 2\pi i \operatorname*{Res}_{\Im(x_0)>0}(f,x_0) = 2i\frac{e^{iki}}{2i} = e^{-k} \quad , \quad k>0$$

Somit schließlich

$$\hat{\mathcal{P}}(k) = e^{-|k|} \quad , \quad k\in\mathbb{R}$$

(c) Mit

$$\mathcal{P} = \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n\cdot\delta_n$$

folgt

$$\hat{\mathcal{P}}(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx}\, d\mathcal{P}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ikn}\cdot p(1-p)^n = p\sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{ik}(1-p)\right]^n = \frac{p}{1-e^{ik}(1-p)}$$

Aufgabe 02

Seien $X_1, X_2, X_3 \overset{\mathrm{d}}{=} X$ iid. Wegen

$$\mathcal{F}\left(aX_1 + bX_2\right)(t) = \mathcal{F}(X)(at) \cdot \mathcal{F}(X)(bt) = e^{-|at|^\alpha} e^{-|bt|^\alpha} = \exp\left[-\left|\underbrace{\sqrt[\alpha]{|a|^\alpha + |b|^a}}_{c} \cdot t\right|^\alpha\right]$$

$$= \mathcal{F}(X)(ct) \cdot e^{it \cdot d} = \mathcal{F}(cX + d)(t)$$

für $d := 0$ ist $aX_1 + bX_2 \overset{\mathrm{d}}{=} cX_3 + d$.

Aufgabe 03

Wegen

$$\Re\left\{\mathcal{F}(X)(t)\right\} = \int_{\mathbb{R}} \cos(xt)\ d\mathcal{P}_X(x)$$

ist

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \Re\left\{\mathcal{F}(X)(t)\right\}}{|t|^{r+1}}\ dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t|^{r+1}} \cdot \left[1 - \int_{\mathbb{R}} \cos(xt)\ d\mathcal{P}_X(x)\right]\ dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{1}{|t|^{r+1}}\left[1 - \cos(xt)\right]}_{\geq 0}\ d\mathcal{P}_X(x)\ dt$$

$$\overset{\text{Tornelli}}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t|^{r+1}}\Big[1 - \underbrace{\cos(xt)}_{\cos(|x|\cdot t)}\Big]\ dt\ d\mathcal{P}_X(x) \overset{u:=|x|\cdot t}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^{r+1}}{|u|^{r+1}}\left[1 - \cos(u)\right]\ \frac{du}{|x|}\ d\mathcal{P}_X(x)$$

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos u}{|u|^{r+1}}\ du}_{1/c(r)} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |x|^r\ \ d\mathcal{P}_X(x)}_{\mathbb{E}|X|^r}$$

$\square$

Aufgabe 04

Fall $r < \alpha$: Da $(1 - \cos u)$ fast-überall positiv ist, ist $c(r) \neq \infty$. Aus Aufgabe (03) und

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \Re(\mathcal{F}(X)(t))}{|t|^{r+1}}\ dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t|^{r+1}}\left[1 - e^{-|t|^\alpha}\right]\ dt = 2\int_0^\infty \frac{1}{t^{r+1}}\left[1 - e^{-t^\alpha}\right]\ dt$$

$$\overset{u:=t^\alpha}{=} 2\int_0^\infty u^{-\frac{r}{a}-1}(1 - e^{-u})\ du = \underbrace{-\frac{2}{r}u^{-\frac{r}{a}}(1 - e^{-u})\Big|_{u=0}^{\infty}}_{0} + \frac{2}{r}\underbrace{\int_0^\infty u^{\left(1-\frac{r}{\alpha}\right)-1}e^{-u}\ du}_{\Gamma\left(1-\frac{r}{\alpha}\right)}$$

$$= \frac{2\Gamma\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)}{r}$$

folgt schließlich die Behauptung.

Fall $r = \alpha$: Wegen

$$\frac{1-e^{-x}}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$$

gilt die Abschätzung

$$1 - \frac{1-e^{-x}}{x} \leq \frac{1}{2} \quad \forall\, x \leq x_0$$

bzw.

$$1 - e^{-x} \geq \frac{x}{2} \quad \forall\, x \geq x_0$$

für genügend kleines $x_0 > 0$. Schließlich folgt aus

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1 - \Re(\mathcal{F}(X)(t))}{|t|^{\alpha+1}}\, dt = 2\int\limits_0^{x_0} \frac{1}{|t|^{\alpha+1}} \underbrace{\left[1 - e^{-|t|^\alpha}\right]}_{\geq |t|^\alpha/2}\, dt + 2\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{1}{|t|^{\alpha+1}} \left[1 - e^{-|t|^\alpha}\right]\, dt$$

$$\geq \underbrace{\int\limits_0^{x_0} \frac{|t|^\alpha}{|t|^{\alpha+1}}\, dt}_{\infty} + 2\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{1}{|t|^{\alpha+1}} \left[1 - e^{-|t|^\alpha}\right]\, dt = \infty$$

die Behauptung.
□

Aufgabe 05

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ixt}\mathcal{F}(\mathcal{P})(t)\ d\mathcal{Q}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-ixt} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{iyt} d\mathcal{P}(y)\ d\mathcal{Q}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{i(y-x)t}}_{\text{beschränkt}}\ d\mathcal{P}(y)\ d\mathcal{Q}(t)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i(y-x)t} d\mathcal{Q}(t)}_{\mathcal{F}(\mathcal{Q})(y-x)}\ d\mathcal{P}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\mathcal{Q})(y-x)\ d\mathcal{P}(y)$$

□