Stochastik II (Wahrscheinlichkeitstheorie) 2009/10

9. Serie

1. Berechnen Sie die charakteristischen Funktionen folgender Verteilungen $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}$:

   (a) $\mathbb{P}$ habe die Dichte $\dfrac{a-|x|}{a^2}$ für $-a \le x \le a$ und Null sonst (Dreiecksverteilung).

   (b) $\mathbb{P}$ hat die Dichte $\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ für $x \in \mathbb{R}$ (Cauchy–Verteilung).

   (c) Es gilt $\mathbb{P}(\{k\}) = p\,(1-p)^k$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$, und p sei eine vorgegebene Zahl in $(0,1)$ (Geometrische Verteilung mit Parameter p).

2. Seien X_0, X_1, X_2 unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen. Die Verteilung der Zufallsgrößen heißt stabil, wenn für alle $a, b > 0$ Zahlen $c > 0$ und $d \in \mathbb{R}$ existieren, so dass
$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX_0 + d$$
gilt. Es sei $\hat{X}(t) = e^{-|t|^\alpha}$ für ein $0 < \alpha \le 2$. Zeigen Sie, dass X eine stabile Verteilung besitzt. Wie berechnen sich c und d aus a und b ?

3. Sei $r \in (0,2)$ und sei X eine zufällige Größe. Beweisen Sie die Identität
$$\mathbb{E}\,|X|^r = c(r) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{Re}\widehat{X}(t)}{|t|^{r+1}}\ \mathrm{d}t$$
mit
$$c(r) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos u}{|u|^{r+1}}\ \mathrm{d}u \right)^{-1}$$
Anmerkung: Es gilt
$$c(r) = \frac{\Gamma(r+1)}{\pi} \sin\big(r\pi/2\big)\ .$$

4. Zeigen Sie unter Benutzung von Aufgabe 3, dass für eine Verteilung mit charakteristischer Funktion $\hat{X}(t) = e^{-|t|^\alpha}$ und $0 < \alpha < 2$ stets $\mathbb{E}\,|X|^\alpha = \infty$ und
$$\mathbb{E}\,|X|^r = \frac{2\,c(r)\,\Gamma\left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)}{r}$$
für alle $r < \alpha$ gilt.

5. Seien $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$. Man zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ stets
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\cdot t}\,\widehat{\mathbb{P}}(t)\ \mathrm{d}\mathbb{Q}(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\mathbb{Q}}(t-x)\ \mathrm{d}\mathbb{P}(t)$$
gilt.

Abgabe: 05. 01. 10