Wahrscheinlichkeitstheorie
FSU Jena - WS 09/10
Serie 08 - Lösungen

Stilianos Louca

January 5, 2010

Aufgabe 01

Wegen

$$\left\{\max_{1\le j\le n}|S_j|^p\ge\varepsilon\right\}=\left\{\max_{1\le j\le n}|S_j|\ge\sqrt[p]{\varepsilon}\right\}$$

und

$$\left\{|S_n|^p\ge\varepsilon\right\}=\left\{|S_n|\ge\sqrt[p]{\varepsilon}\right\}$$

folgt nach Levis Maximalgleichung

$$\mathcal{P}\Big(\max_{1\le j\le n}|S_j|^p\ge\varepsilon\Big)=\mathcal{P}\left(\max_{1\le j\le n}|S_j|\ge\sqrt[p]{\varepsilon}\right)\le 2\cdot\mathcal{P}\left(|S_n|\ge\sqrt[p]{\varepsilon}\right)=2\cdot\mathcal{P}\left(|S_n|^p\ge\varepsilon\right)$$

Somit:

$$\mathbb{E}\max_{1\le j\le n}|S_j|^p=\int_0^\infty\mathcal{P}\Big(\max_{1\le j\le n}|S_j|^p\ge t\Big)\,dt\le 2\cdot\int_0^\infty\mathcal{P}\left(|S_n|^p\ge t\right)\,dt=2\cdot\mathbb{E}\,|S_n|^p$$

Aufgabe 02

Fall $\alpha>\frac{1}{2}$

Bekanntlich geht

$$\frac{S_n}{b_n}\xrightarrow[\text{f.s.}]{n\to\infty}0$$

für $0<b_1\le b_2\le\dots\to\infty$ mit

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{\mathbb{V}X_k}{b_k^2}<\infty$$

Setzt man speziell $b_k:=\sqrt{k}\cdot(\ln(k+1))^\alpha$ so ist

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{\mathbb{V}X_k}{b_k^2}=\mathbb{V}X_1\cdot\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k(\ln(k+1))^{2\alpha}}<\infty$$

da

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x(\ln(x+1))^{2\alpha}}=\int_0^\infty\underbrace{\frac{x+1}{x}}_{\le 2}\frac{dx}{(x+1)(\ln(x+1))^{2\alpha}}\overset{u:=x+1}{\le}2\int_2^\infty\frac{du}{u(\ln(u))^{2\alpha}}=\frac{2(\ln(u))^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\Bigg|_2^\infty<\infty$$

(Integralkriterium für Reihen). Daher

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}(\ln(n+1))^\alpha}\xrightarrow[\text{f.s.}]{n\to\infty}0$$

Fall $\alpha = 0$

Für standardnormalverteilte $X_1, X_2, .. \sim \mathcal{N}_{0,1}$ ist $S_n \sim \mathcal{N}_{0,n}$ bzw. $S_n/\sqrt{n} \sim \mathcal{N}_{0,1}$. Gingen nun $S_n/\sqrt{n} \overset{n\to\infty}{\underset{\text{f.s}}{\longrightarrow}} 0$ so müsse gelten

$$\underbrace{\mathcal{P}\left(\left|\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right| > \varepsilon\right)}_{=\text{const}_\varepsilon > 0} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \ \forall\, \varepsilon > 0$$

was unmöglich ist.

Aufgabe 03

Nach Übungsserie 02, Aufgabe 01 folgt aus $\mathbb{E}\,|X_1| = \infty$ dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mathcal{P}\left(|X_1| \geq c \cdot n\right)}_{\mathcal{P}(|X_n| \geq c\cdot n)} = \infty \ \ \forall\, c > 0$$

Nach Borel & Cantelli:

$$\underbrace{\mathcal{P}\left(|X_n| \geq n \cdot c \text{ u.o.}\right)}_{\mathcal{P}\left(\frac{|X_n|}{n} \geq c \text{ u.o.}\right)} = 1 \ \ \forall\, c > 0$$

bzw.

$$\mathcal{P}\left(\frac{|X_n|}{n} < c \text{ s.i.}\right) = 0 \ \ \forall\, c > 0 \tag{0.1}$$

Wegen

$$|X_n| = |S_n - S_{n-1}| \leq |S_n| + |S_{n-1}|$$

ist

$$\left\{\frac{|S_n|}{n} < c \text{ s.i.}\right\} \subseteq \{|X_n| \leq cn + c(n-1) \text{ s.i.}\} \subseteq \left\{\frac{|X_n|}{n} \leq 2c \text{ s.i.}\right\} \quad \forall\, c > 0$$

bzw. nach (0.1)

$$\mathcal{P}\left(\frac{|S_n|}{n} < c \text{ s.i.}\right) = 0 \quad \forall\, c \in \mathbb{N}$$

Bekanntlich folgt daraus

$$\mathcal{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n} < \infty\right) = 0$$

□

Aufgabe 04

Beweis der Behauptung

Seien $X_k : (\Omega, \mathfrak{S}, \mathcal{P}) \to \mathbb{R}$ unabhängig mit $\mathbb{E}\,|X_k| < \infty$ und $\mathbb{E}X_k = 0$. Für

$$\omega \in \{X_n \geq n \text{ u.o.}\}$$

existiert eine Folge $(n_l)_{l=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ mit $|X_{n_l}(\omega)| \geq n_l \ \ \forall\, l$. Gilt nun auch

$$\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)}_{S_n(\omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

so folgt

$$0 = \lim_{l\to\infty} S_{n_l}(\omega) - S_{n_l-1}(\omega) = \lim_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{n_l-1} \underbrace{\left[\frac{X_k(\omega)}{n_l} - \frac{X_k(\omega)}{n_l-1}\right]}_{\frac{-X_k(\omega)}{n_l(n_l-1)}} + \frac{X_{n_l}(\omega)}{n_l}$$

$$= -\lim_{l\to\infty} \frac{1}{n_l} \underbrace{\frac{1}{(n_l-1)} \sum_{k=1}^{n_l-1} X_k(\omega)}_{\stackrel{l\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\lim_{l\to\infty} \frac{X_{n_l}(\omega)}{n_l}}_{\substack{\neq 0 \\ \text{falls überhaupt} \\ \text{existent}}}$$

ein Widerspruch! Daher sind

$$\{X_n \geq n \text{ u.o.}\} \cap \left\{S_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\} = \emptyset$$

Erfüllen nun die X_k das SLLN, so ist $\mathcal{P}(S_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0) = 1$, sprich

$$\mathcal{P}\left(X_n \geq n \text{ u.o.}\right) = 0$$

□

Spezialfälle

(a) Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mathcal{P}(|X_n| \geq n)}_{\geq \mathcal{P}(|X_n| \geq 2^n) = 1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

ist nach Borel & Cantelli $\mathcal{P}(|X_n| \geq n \text{ u.o.}) = 1$. Nach obigen Überlegungen erfüllen die $X_1, X_2, ..$ also **nicht** das SLLN.

(b) Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\,|X_n|^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

erfüllen die X_n nach Khinchine das SLLN.

(c) Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(X_n \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$$

gilt nach Borel & Cantelli

$$\mathcal{P}\left(X_n \geq n \text{ u.o}\right) = 1$$

Nach obiger Vorüberlegung erfüllen die X_n **nicht** das SLLN.

(d) Wegen

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x + 1)^2} \leq \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = -\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^{\infty} < \infty$$

ist auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\,|X_n|^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n + 1)^2} < \infty$$

(vgl. Integralkriterium für Reihen). Nach Khinchine erfüllen die X_k das SLLN.