Stochastik II (Wahrscheinlichkeitstheorie) 2009/10

8. Serie

1. Gegeben sei eine Folge unabhängiger symmetrischer zufälliger Größen $X_1, X_2, \ldots$. Wie üblich setzt man $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Dann schätze man für $p > 0$ den Erwartungswert $\mathbb{E}\max_{1\le j\le n} |S_j|^p$ gegen ein Vielfaches von $\mathbb{E}\,|S_n|^p$ ab.

2. Beweisen Sie folgende Verschärfung des "Starken Gesetzes der großen Zahlen" für zufällige Größen mit zweitem Moment:
   Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine i.i.d. Folge mit $\mathbb{E}\ X_1 = 0$ und $\mathbb{E}\,|X_1|^2 < \infty$. Zeigen Sie, dass dann für jedes $\alpha > 1/2$ $\mathbb{P}$–f.ü. die Aussage
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}\,(\log(n+1))^\alpha} = 0$$
   richtig ist. Dabei sei wie immer $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
   Man zeige, dass die obige Aussage für $\alpha = 0$ nicht mehr gilt.
   Hinweis: Betrachten Sie unabhängige $\mathcal{N}(0,1)$–verteilte zufällige Größen.

3. Es sei $(X_n)_{n\ge 1}$ eine unabhängige Folge identisch verteilter reeller zufälliger Größen mit $\mathbb{E}\ |X_1| = \infty$. Zeigen Sie, dass fast sicher die Aussage
   $$\limsup_{n\to\infty} n^{-1}|S_n| = \infty$$
   gilt.

4. Gegeben sei eine unabhängige Folge $X_1, X_2, \ldots$ von zufälligen Größen mit $\mathbb{E}\ |X_n| < \infty$ und $\mathbb{E}\ X_n = 0$ für $n = 1, 2, \ldots$.
   Beweisen Sie folgende Aussage: Erfüllt die Folge das "Starke Gesetz der großen Zahlen", so gilt notwendigerweise $\mathbb{P}(|X_n| \ge n \text{ u.o.}) = 0$.
   Überprüfen Sie, welche der unten angegebenen Folgen $X_1, X_2, \ldots$ von unabhängigen zufälligen Größen das "Starke Gesetz der großen Zahlen" erfüllen:

   (a) $\mathbb{P}(X_n = -2^n) = \mathbb{P}(X_n = 2^n) = 1/2$ für $n = 1, 2, \ldots$.

   (b) $\mathbb{P}(X_n = -2^n) = \mathbb{P}(X_n = 2^n) = 2^{-(2n+1)}$ und $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 2^{-2n}$ für $n = 1, 2, \ldots$.

   (c) $\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = 2^{-1}n^{-1/2}$ und $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - n^{-1/2}$ für $n = 1, 2, \ldots$.

   (d) $\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \dfrac{1}{2n(\log n + 1)^2}$
   und $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \dfrac{1}{n(\log n + 1)^2}$ für $n = 1, 2, \ldots$.

Abgabe: 15. 12. 09