Wahrscheinlichkeitstheorie
FSU Jena - WS 09/10
Serie 07 - Lösungen

Stilianos Louca

December 15, 2009

Aufgabe 01

Es seien $A_1, ..., A_n \in \mathfrak{S}$ unabhängige Ereignisse und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_n) = \infty$$

Da auch die $A_1^c, A_2^c, ..$ unabhängig sind, kann man schreiben

$$\mathcal{P}\left(A_n \text{ u.o.}\right) = \mathcal{P}\Bigg[\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{n\geq m} A_n}_{\text{fallend in } m}\Bigg] = \lim_{m\to\infty} \mathcal{P}\left[\bigcup_{n\geq m} A_n\right] = \lim_{m\to\infty}\left\{1-\mathcal{P}\left[\left(\bigcup_{n\geq m} A_n\right)^c\right]\right\}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left[1-\mathcal{P}\left(\bigcap_{n\geq m} A_n^c\right)\right] \overset{\substack{A_1^c, A_2^c, .. \\ \text{unabhängig}}}{=} \lim_{m\to\infty}\left[1-\prod_{n\geq m}\mathcal{P}(A_n^c)\right] = \lim_{m\to\infty}\left[1-\prod_{n\geq m}\left[1-\mathcal{P}(A_n)\right]\right]$$

Da $0 \leq \mathcal{P}(A_n) \leq 1$, folgt aus

$$\sum_{n\geq m} \mathcal{P}(A_n) = \infty$$

bekanntlich

$$\prod_{n\geq m}\left[1-\mathcal{P}(A_n)\right] = 0$$

und somit schließlich

$$\mathcal{P}(A_n \text{ u.o.}) = 1$$

□

Aufgabe 02

Seien $A_1, A_2, ...$ unabhängige Ereignisse (und somit auch $A_1^c, A_2^c, ..$). Wegen

$$\mathcal{P}(A_n \text{ s.i.}) = 1 - \mathcal{P}(A_n^c \text{ u.o.})$$

gilt nach Borel & Cantelli:

$$\mathcal{P}(A_n \text{ s.i.}) = 1 \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}(A_n^c) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\mathcal{P}(A_n)\right] < \infty$$

$$\mathcal{P}(A_n \text{ s.i.}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}(A_n^c) = \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\mathcal{P}(A_n)\right] = \infty$$

Aufgabe 03

Vorbetrachtung

Bekanntlich ist eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines metrischen Raumes (X, d) mit dichter Teilmenge $Q \subseteq X$ genau dann dicht in X wenn

$$\forall\ q \in Q,\ \forall\ \varepsilon > 0 : A \cap B_\varepsilon(q) \neq \emptyset$$

denn (Richtung "$\Leftarrow$") für $x \in X,\ \varepsilon > 0$, dazu $q \in Q \cap B_{\varepsilon/2}(x)$, ist

$$A \cap B_{\varepsilon/2}(q) \neq \emptyset$$

also

$$A \cap B_\varepsilon(x) \overset{\substack{\Delta-\\ \text{Ungleichung}}}{\neq} \emptyset$$

Beweis der Aussage

Da $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ dicht in $[0,1]$ liegt, gilt nach der Vorbetrachtung

$$\Omega_0 = \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \forall\ q \in \mathbb{Q} \cap [0,1], k \in \mathbb{N} : A(\omega) \cap B_{1/k}(q) \neq \emptyset\right\}$$

$$= \bigcap_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{U_n \in B_{1/k}(q)\right\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

das heißt Ω_0 ist messbar. Ferner gilt für jede $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$:

$$\mathcal{P}\left[\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{U_n \in B_{1/k}(q)\right\}}_{\text{fallend in } k}\right] = \lim_{k \to \infty} \mathcal{P}\left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{U_n \in B_{1/k}(q)\right\}\right] = \lim_{k \to \infty} \left\{1 - \mathcal{P}\left[\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{U_n \notin B_{1/k}(q)\right\}\right]\right\}$$

$$\overset{\substack{U_1, U_2, .. \\ \text{unabhängig}}}{=} \lim_{k \to \infty} \left\{1 - \prod_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mathcal{P}\left[U_n \notin B_{1/k}(q)\right]}_{\leq 1 - \frac{1}{2k}}\right\} \geq \lim_{k \to \infty} \left\{1 - \underbrace{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2k}\right)}_{0}\right\} = 1$$

und daher[1]

$$\mathcal{P}(\Omega_0) = 1$$

$\square$

Aufgabe 04

Wegen

$$\left\{X_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0\right\} = \left\{|X_n| \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0\right\} = \left\{\overline{\lim_{n \to \infty}}\ |X_n| = 0\right\}$$

gilt

$$\mathcal{P}\left(X_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0\right) = \mathcal{P}\left[\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{|X_n| \leq \tfrac{1}{k} \text{ s.i.}\right\}}_{\text{fallend in } k}\right] = \lim_{k \to \infty} \mathcal{P}\left(|X_n| \leq \tfrac{1}{k} \text{ s.i.}\right)$$

[1] Abzählbare Schnitte fast-sicherer Ereignisse sind auch fast-sichere Ereignisse.

Daher:

$$\mathcal{P}\left(X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \underbrace{\mathcal{P}\left(|X_n| \leq \tfrac{1}{k} \text{ s.i.}\right)}_{\substack{\leq 1 \\ \text{fallend in } k}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}\left(|X_n| \leq \tfrac{1}{k} \text{ s.i.}\right) = 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

$$\overset{(02)}{\Leftrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \mathcal{P}(|X_n| \leq \tfrac{1}{k})\right] < \infty \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \mathcal{P}\left(X_n \leq \tfrac{1}{k}\right) + \mathcal{P}\left(X_n < -\tfrac{1}{k}\right)\right] < \infty \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \mathcal{P}\left(X_n \leq \tfrac{1}{k}\right) + \mathcal{P}\left(X_n \leq -\tfrac{1}{k}\right)\right] < \infty \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 05

Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathcal{P})$ erfülle das starke Gesetz der großen Zahlen, sprich

$$\mathcal{P}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |\overline{X}_n| = 0\right) = 1 \tag{0.1}$$

für

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}X_k) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Ferner sei

$$\overline{Y}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - \mathbb{E}Y_k) \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Wegen

$$|\overline{Y}_n| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(Y_k - \mathbb{E}Y_k)\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\left[(Y_k - X_k) + (\mathbb{E}X_k - \mathbb{E}Y_k) + (X_k - \mathbb{E}X_k)\right]\right|$$

$$\leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(Y_k - X_k)\right| + \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(\mathbb{E}X_k - \mathbb{E}Y_k)\right| + \underbrace{\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}X_k)\right|}_{|\overline{X}_n|}$$

gilt

$$\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |\overline{Y}_n| = 0\right\} \supseteq \left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(Y_k - X_k)\right| = 0\right\} \cap \left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(\mathbb{E}X_k - \mathbb{E}Y_k)\right| = 0\right\} \cap \left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |\overline{X}_n| = 0\right\} \tag{0.2}$$

- Aus

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}(X_n \neq Y_n) < \infty$$

folgt nach Borel & Cantelli

$$\underbrace{\mathcal{P}\left(X_n \neq Y_n \text{ u.o.}\right)}_{1-\mathcal{P}(X_n = Y_n \text{ s.i.})} = 0$$

bzw.

$$\mathcal{P}\Big(\overbrace{\Big\{\lim_{n\to\infty}(Y_n - X_n) = 0\Big\}}^{\supseteq\{X_n=Y_n \text{ s.i.}\}}\Big) = 1 \tag{0.3}$$

Wegen

$$\Big\{\lim_{n\to\infty}(Y_n - X_n) = 0\Big\} \subseteq \Big\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - X_k) = 0\Big\}$$

muss dann auch

$$\mathcal{P}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - X_k) = 0\Big) \overset{(0.3)}{=} 1 \tag{0.4}$$

- Wegen $\lim_{n\to\infty}(\mathbb{E}X_k - \mathbb{E}Y_k) = 0$, gilt nach Kronecker auch

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\mathbb{E}X_k - \mathbb{E}Y_k) = 0 \tag{0.5}$$

Aus (0.2), (0.1), (0.4) und (0.5) folgt schließlich

$$\mathcal{P}\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \left|\overline{Y}_n\right| = 0\right) = 1$$

□